ว.วิทย. มข. 40(3) 802-812 (2555) KKU Sci. J. 40(3) 802-812 (2012)

ระบบพลวัตวิยุตเชิงเส้น

Linear Discrete Dynamical System

พิกุล ภูผาสุข [1]

บทคัดย่อ

บทความนี้ได้นำเสนอการศึกษาเรื่องตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ขั้นแนะนำด้วยระบบพลวัตวิยุตเชิงเส้น ได้อธิบายแนวคิด ให้นิยามและตัวอย่างปัญหาที่สามารถกำหนดด้วยระบบพลวัตวิยุตเชิงเส้นหนึ่งและสองตัวแปร พร้อมทั้งการแสดงพฤติกรรมของระบบด้วยกราฟที่แสดงพลวัตของจุดของตัวแปร ให้ตัวอย่างการลู่เข้า การลู่ออกรูปแบบต่าง ๆ กรณีที่มีพฤติกรรมเป็นคาบ รวมทั้งแสดงการวิเคราะห์เงื่อนไขที่ทำให้ลู่เข้าและการคำนวณหาจุดลิมิตของระบบ จากการศึกษาในขั้นต้นพบว่า ระบบพลวัตวิยุตเชิงเส้นหนึ่งและสองตัวแปร ให้ลักษณะพฤติกรรมของระบบเชิงตัวแบบและนำไปสู่สมบัติเชิงวิเคราะห์ขั้นพื้นฐานที่ครอบคลุมและน่าสนใจเป็นอย่างยิ่ง

ABSTRACT

This article presents an introductory study on Mathematical models by using the linear discrete dynamical systems. The basic principles, definitions and some problems modeled by the linear discrete dynamical systems of one and two variables are introduced, along with the illustrations of their dynamical behaviors by graph plotting of the variable points. The convergence, divergence and the periodic behaviors are discussed, including the analysis of conditions for convergence and how to calculate the limit points of the convergence systems. From this study, it is found that the linear discrete dynamical systems of one and two variables can give the model behaviors and lead to various interesting analytical properties.

คำสำคัญ: ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ระบบพลวัตวิยุตเชิงเส้น ค่าประจำของเมทริกซ์

Keywords: Mathematical models, Linear discrete dynamical system, Matrix norm

[1] ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น อ.เมือง จ.ขอนแก่น 40002

E-mail: ppikul@kku.ac.th

บทนำ

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical models) เป็นหัวข้อที่สำคัญมากในการเรียนการสอนและการทำวิจัยทางด้านคณิตศาสตร์ สิ่งที่เราเรียนในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษา มัธยมศึกษา ไปจนถึงระดับอุดมศึกษา ประกอบไปด้วยโครงสร้างพื้นฐานคณิตศาสตร์จำนวนมาก เช่น ระบบเซต ระบบตรรกศาสตร์ ระบบจำนวน ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน เวกเตอร์ และเมทริกซ์ รวมทั้งหลักการหรือสมบัติพื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับโครงสร้างนั้น ๆ จากโครงสร้างพื้นฐานเหล่านี้ สามารถนำมาประกอบกันเข้ากลายเป็นโครงสร้างที่ซับซ้อนมากยิ่งขึ้น เช่น จากสมการเป็นระบบสมการ จากที่มีตัวแปรที่เกี่ยวข้องเพียงตัวแปรเดียว เป็นที่มีหลายตัวแปร ทั้งนี้เพื่อที่จะสามารถทำให้เกิดโครงสร้างที่นำไปใช้อธิบาย กำหนดหรือเป็นตัวแบบของปัญหาที่เรากำลังสนใจ ดังนั้นแนวคิดของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์จึงซ่อนอยู่เบื้องหลังการศึกษาทางคณิตศาสตร์ในทุกเรื่องและทุกระดับ โดยที่อาจจะไม่ได้ตระหนักหรือรู้ตัว เนื้อหาวิชาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ไม่ได้ปรากฏอย่างเป็นรูปธรรมในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ระดับพื้นฐาน หรือแม้แต่ในระดับอุดมศึกษาของบ้านเรา ซึ่งเนื้อหาวิชาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์มักจะเน้นไปทางด้านการแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equations) หรือปัญหาทางด้านวิศวกรรมศาสตร์ แต่อย่างไรก็ตามในช่วงไม่กี่ปีที่ผ่านมานี้ ได้มีแนวทางในการเรียนการสอนวิชาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เป็นรูปธรรมมากขึ้น โดยใช้โครงสร้างคณิตศาสตร์ที่เรียกว่า ระบบพลวัต (dynamical systems) บทความนี้จึงมีความมุ่งหมายที่จะแนะนำระบบพลวัตวิยุตเชิงเส้น (linear discrete dynamical system) ซึ่งสามารถใช้ในการเรียนการสอนวิชาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (รวมทั้งการทำวิจัยหรือโครงงานคณิตศาสตร์) ได้เป็นอย่างดี

ระบบพลวัตวิยุตเชิงเส้นหนึ่งตัวแปร

ปัญหาที่สนใจจะถูกกำหนดด้วยพฤติกรรมของตัวแปรหนึ่งตัว ซึ่งตัวแปรจะมีค่าแปรเปลี่ยนไปได้ขึ้นอยู่กับช่วงเวลาที่เราเก็บข้อมูล หรือทำการวัดค่าของตัวแปรดังกล่าว ณ จุดเวลาต่าง ๆ จึงทำให้เกิดตัวแปรที่สามารถพิจารณาเป็นค่าฟังก์ชัน f ของเวลา เมื่อกำหนดช่วงเวลาเท่า ๆ กัน ณ จุดเวลาที่ n จะให้ค่าตัวแปรซึ่งกำหนดเป็น $x_n = f(n)$ และทำให้ได้ลำดับ x_n โดยที่ $n = 0,1,2,...$ ในกรณีที่พฤติกรรมของระบบเป็นเชิงเส้น กล่าวคือ ค่า x_n กับค่า x_{n-1} มีสัดส่วนคงที่และไม่เป็นศูนย์ (อาจจะต้องเลื่อนค่าของข้อมูลด้วยค่าคงที่) จะได้สมการหรือความสัมพันธ์

$$\frac{x_n - c}{x_{n-1} - c} = a$$

โดยที่ a และ c เป็นค่าคงที่จำนวนจริง และได้ว่า

$$x_n = a x_{n-1} + b$$

โดยที่ $b = c - ac$ เมื่อใช้ร่วมกับค่าเริ่มต้น x_0 ก็จะให้ค่า x_n ต่าง ๆ ได้ โดยการคำนวณซ้ำแบบเวียนเกิด

บทนิยามของระบบพลวัตวิยุตเชิงเส้นหนึ่งตัวแปร

เรียกระบบที่กำหนดด้วยลำดับ x_n มีค่าเริ่มต้น x_0 และความสัมพันธ์เวียนเกิด $x_n = ax_{n-1} + b$ ว่า *ระบบพลวัตวิยุตเชิงเส้นหนึ่งตัวแปร* (Marotto, 2006)

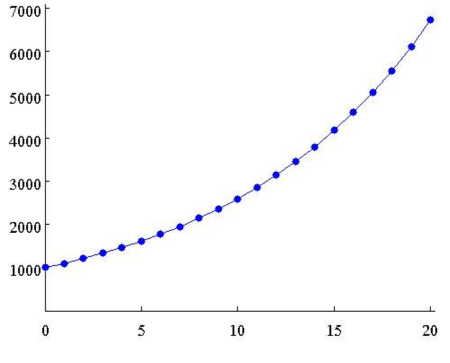
ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นปัญหาที่กำหนดด้วยระบบพลวัตเชิงเส้นหนึ่งตัวแปร

ตัวอย่างที่ 1 ถ้าฝากเงินในธนาคารด้วยเงินต้น $1{,}000$ บาท อัตราดอกเบี้ยทบต้น 10% ต่อปี ให้ a_n เป็นจำนวนเงิน (บาท) ในบัญชี เมื่อสิ้นปีที่ n ซึ่งสามารถเขียนระบบพลวัตวิยุตเชิงเส้นได้เป็น $a_n = 1.1a_{n-1}$, $n \geq 1$ โดยที่ $a_0 = 1{,}000$

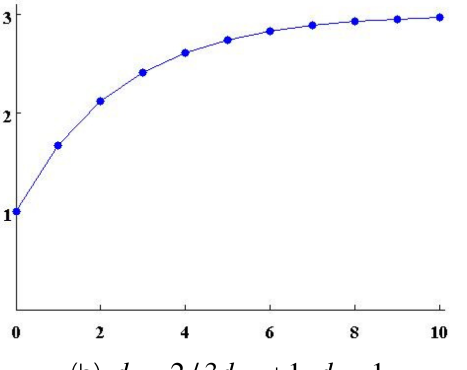
ตัวอย่างที่ 2 ผู้ป่วยคนหนึ่งต้องได้รับยาปฏิชีวนะทุกวัน วันละ 1 มิลลิกรัม ในแต่ละวันร่างกายของผู้ป่วยสามารถขับยาออกจากกระแสเลือดได้ $\frac{1}{3}$ เท่าของปริมาณยาที่มีอยู่ในกระแสเลือด ณ วันนั้น ให้ d_n เป็นปริมาณของยา (มิลลิกรัม) ในกระแสเลือดของผู้ป่วยหลังวันที่ n จะได้ระบบพลวัตวิยุตเชิงเส้นคือ $d_n = \frac{2}{3}d_{n-1} + 1$, $n \geq 1$ โดยที่ $d_0 = 1$ (Sandefur, 2003)

การแสดงพฤติกรรมของระบบพลวัตวิยุตเชิงเส้นหนึ่งตัวแปรด้วยกราฟ

เนื่องจากระบบถูกกำหนดด้วยลำดับ x_n และลำดับเป็นฟังก์ชัน จึงสามารถเขียนกราฟเพื่อแสดงหรือช่วยในการพิจารณาพฤติกรรมของระบบได้ เราจะให้ตัวอย่างของระบบพลวัตวิยุตเชิงเส้นหนึ่งตัวแปรในรูปแบบต่าง ๆ พร้อมทั้งแสดงลักษณะของกราฟต่าง ๆ ที่เป็นไปได้ จากตัวอย่างที่ 1 และตัวอย่างที่ 2 จะได้กราฟดังรูปที่ 1(a) และ 1(b) ตามลำดับ



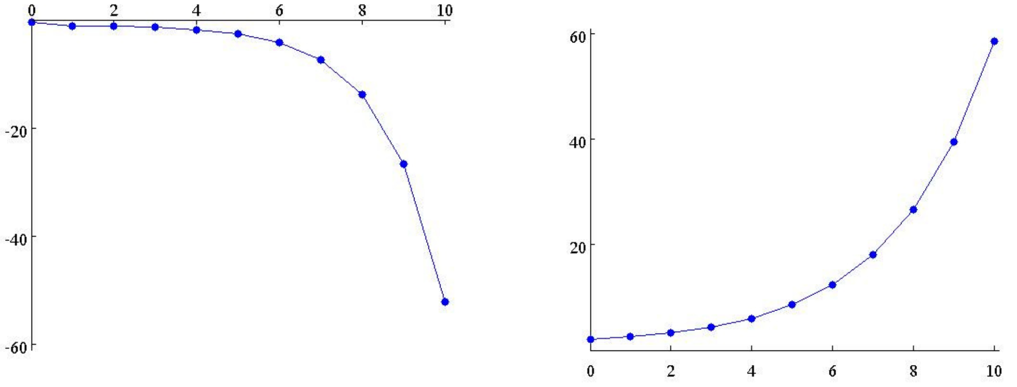
(a) $a_n = 1.1a_{n-1}$, $a_0 = 1000$



(b) $d_n = 2/3d_{n-1} + 1$, $d_0 = 1$

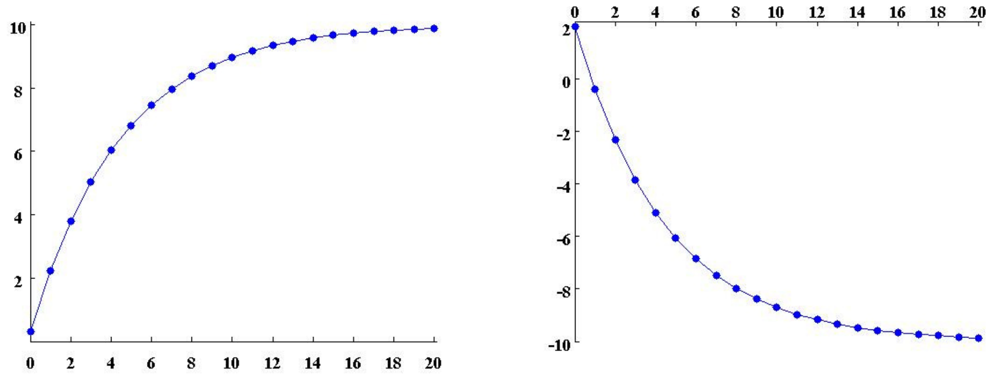
รูปที่ 1 กราฟแสดงพฤติกรรมของระบบพลวัตวิยุตเชิงเส้นของตัวอย่างที่ 1 และ 2

ตัวอย่างของกราฟรูปแบบอื่น ๆ ที่เป็นไปได้ แสดงดังรูปที่ 2-4



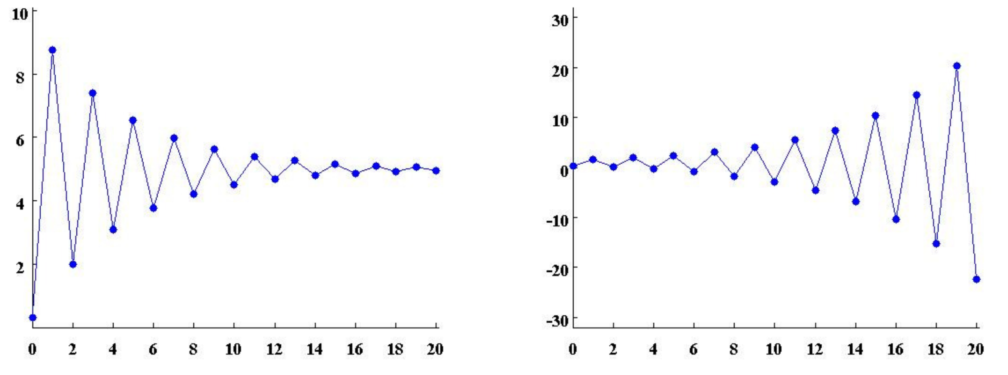
(a) $x_n = 2x_{n-1} - 0.1,\ x_0 = -0.5$ (b) $x_n = 1.5x_{n-1} - 0.5,\ x_0 = 2$

รูปที่ 2 กราฟแสดงพฤติกรรมการลู่ออกแบบทางเดียวของตัวแปรของระบบ $x_n = ax_{n-1} + b$



(a) $x_n = 0.8x_{n-1} + 2,\ x_0 = 0.3$ (b) $x_n = 0.8x_{n-1} - 2,\ x_0 = 2$

รูปที่ 3 กราฟแสดงพฤติกรรมการลู่เข้าแบบทางเดียวของตัวแปรของระบบ $x_n = ax_{n-1} + b$



(a) $x_n = -0.8x_{n-1} + 9,\ x_0 = 0.3$ (b) $x_n = -1.2x_{n-1} + 2,\ x_0 = 0.3$

รูปที่ 4 กราฟแสดงพฤติกรรมการลู่เข้า (a) และลู่ออก (b) แบบกวัดแกว่งของตัวแปรของระบบ $x_n = ax_{n-1} + b$

การวิเคราะห์ระบบพลวัตวิยุตเชิงเส้นหนึ่งตัวแปรด้วยเทคนิคการคลี่

จากระบบพลวัตวิยุตเชิงเส้นหนึ่งตัวแปรที่กำหนดด้วยลำดับ x_n มีค่าเริ่มต้น x_0 และความสัมพันธ์เวียนเกิด $x_n = ax_{n-1} + b$ สามารถทำการคลี่หรือแทนค่าย้อนกลับไปยังค่าเริ่มต้น x_0 ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} x_n &= ax_{n-1} + b \\ &= a(ax_{n-2} + b) + b = a^2 x_{n-2} + ba + b \\ &= a^2(ax_{n-3} + b) + ba + b = a^3 x_{n-3} + ba^2 + ba + b \\ &\ \vdots \\ &= a^n x_0 + b(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1) \\ &= \begin{cases} a^n x_0 + b(\dfrac{a^n - 1}{a-1}) \ , \ a \neq 1 \\ x_0 + bn \ , \ a = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

ซึ่งใช้สมบัติพื้นฐานของอนุกรมเรขาคณิต เพื่อหาค่าผลบวกของ

$$1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}$$

ในกรณีที่ $|a| < 1$ จะได้ว่า a^n ลู่เข้าสู่ 0 เมื่อ n มีค่ามาก และทำให้ได้ว่า $1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}$ ลู่เข้าสู่ $\dfrac{1}{1-a}$ ดังนั้นจะสามารถหาลิมิตของ x_n ได้ และได้ว่า x_n ลู่เข้าสู่ $\dfrac{b}{1-a}$ ดังตัวอย่างกราฟในรูปที่ 1(b) 3(a)-(b) และ 4(a) ส่วนในกรณี $|a| > 1$ จะได้ว่า x_n ลู่ออก เมื่อ n มีค่ามาก ดังตัวอย่างกราฟในรูปที่ 1(a) 2(a)-(b) และ 4(b) เมื่อพิจารณาเครื่องหมายของ a จะได้ว่าเมื่อค่า $a > 0$ ลักษณะกราฟจะเป็นแบบทางเดียว ในขณะที่ถ้า $a < 0$ ลักษณะกราฟจะเป็นแบบกวัดแกว่ง

ระบบพลวัตวิยุตเชิงเส้นสองตัวแปร

เมื่อปัญหาที่สนใจมีความซับซ้อนมากขึ้น โดยปัญหาถูกกำหนดด้วยพฤติกรรมของตัวแปร 2 ตัว ที่มีความเกี่ยวข้องกันและมีค่าแปรเปลี่ยนไปขึ้นอยู่กับช่วงเวลาที่พิจารณา นั่นคือ ณ จุดเวลาที่ n จะให้ค่าตัวแปร x_n และ y_n และทำให้ได้ลำดับ $X_n = (x_n, y_n)$ โดยที่ $n = 0, 1, 2, \ldots$ เนื่องจากระบบมีตัวแปร 2 ตัว ดังนั้นเมื่อพฤติกรรมของระบบเป็นเชิงเส้น จะทำให้ได้ระบบสมการ

$$X_n = AX_{n-1} + B$$

เมื่อ A เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×2 ค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปร และ B เป็นเวกเตอร์ค่าคงตัว ซึ่งถ้ากำหนดค่าเริ่มต้น X_0 ก็จะสามารถหาค่า X_n ได้โดยการคำนวณซ้ำแบบเวียนเกิด

บทนิยามของระบบพลวัตวิยุตเชิงเส้นสองตัวแปร

เรียกระบบที่กำหนดด้วยลำดับ $X_n = (x_n, y_n)$ มีค่าเริ่มต้น $X_0 = (x_0, y_0)$ และความสัมพันธ์เวียนเกิด $X_n = AX_{n-1} + B$ โดยที่ A เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×2 และ B เป็นเวกเตอร์ขนาด 2×1 ว่า *ระบบพลวัตวิยุตเชิงเส้นสองตัวแปร* (Marotto, 2006)

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นปัญหาที่กำหนดด้วยระบบพลวัตวิยุตเชิงเส้นสองตัวแปร

ตัวอย่างที่ 3 วิตามินเอถูกดูดซึมเข้าสู่ตับและพลาสมา ถ้าในแต่ละวัน 30% ของวิตามินเอในพลาสมาถูกดูดซึมเข้าสู่ตับ และ อีก 40% ถูกขับออกจากร่างกาย ในขณะที่ 1% ของวิตามินเอในตับถูกดูดซึมกลับเข้าสู่พลาสมา และอีก 10% ถูกขับออกจากร่างกาย ถ้าสมมติว่าคนเรารับวิตามินเอเข้าสู่ร่างกายวันละ 1 มิลลิกรัม ซึ่งจะถูกดูดซึมเข้าสู่พลาสมาโดยตรง ให้ x_n และ y_n เป็นปริมาณ (มิลลิกรัม) ของวิตามินเอในพลาสมาและตับในวันที่ n ตามลำดับ จะได้ตัวแบบของระบบพลวัตวิยุตเชิงเส้นดังนี้

$$\begin{aligned} x_n &= 0.3x_{n-1} + 0.01y_{n-1} + 1 \\ y_n &= 0.3x_{n-1} + 0.89y_{n-1} \end{aligned}$$

ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบ $X_n = AX_{n-1} + B$ ได้เป็น

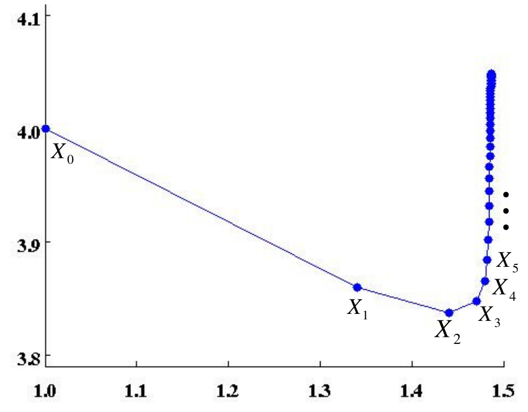
$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.01 \\ 0.3 & 0.89 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

เมื่อ

$$X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.01 \\ 0.3 & 0.89 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

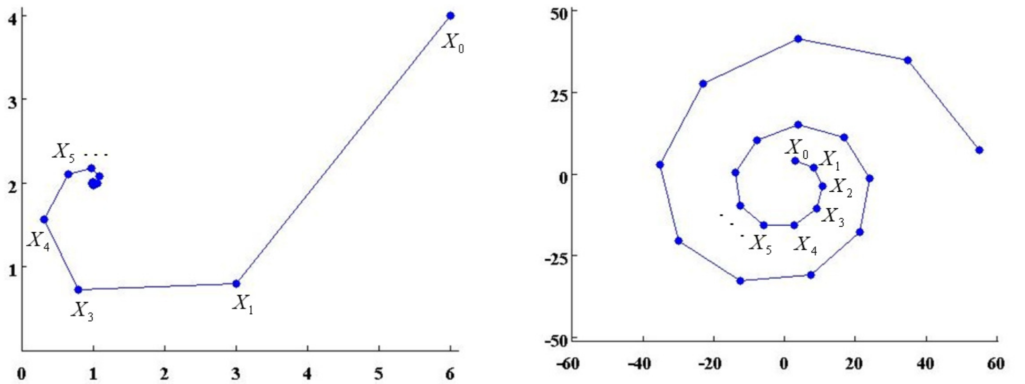
การแสดงพฤติกรรมของระบบพลวัตวิยุตเชิงเส้นสองตัวแปรด้วยกราฟ

เนื่องจากกำหนดระบบด้วยลำดับ $X_n = (x_n, y_n)$ และลำดับเป็นฟังก์ชัน จึงสามารถเขียนกราฟเพื่อช่วยในการพิจารณาพฤติกรรมของระบบได้ในทำนองเดียวกันกับระบบพลวัตเชิงเส้นหนึ่งตัวแปร แตกต่างกันที่ในกราฟที่แสดงค่าของตัวแปรของระบบพลวัตเชิงเส้นสองตัวแปร แต่ละจุดคือคู่อันดับ (x_n, y_n) เมื่อ $n = 0,1,2,...$ ซึ่งกราฟของตัวอย่างที่ 3 เมื่อ $(x_0, y_0) = (1,4)$ แสดงในรูปที่ 5 โดยให้แกนแนวนอนแสดงค่า x_n และแกนแนวตั้งแสดงค่า y_n



รูปที่ 5 กราฟแสดงพฤติกรรมของระบบพลวัตวิยุตเชิงเส้นของตัวอย่างที่ 3

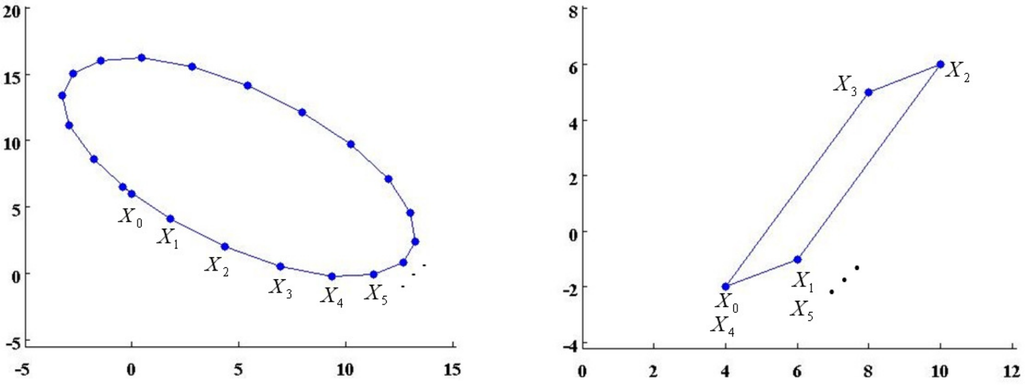
ตัวอย่างของกราฟรูปแบบอื่น ๆ ที่เป็นไปได้ แสดงดังรูปที่ 6-7



(a) $x_n = 0.2x_{n-1} + 0.5y_{n-1} - 0.2$
$y_n = -0.4x_{n-1} + 0.4y_{n-1} + 1.6$
$x_0 = 6, y_0 = 4$

(b) $x_n = 0.8x_{n-1} + 0.7y_{n-1} + 3$
$y_n = -0.7x_{n-1} + 0.9y_{n-1} + 0.3$
$x_0 = 3, y_0 = 4$

รูปที่ 6 กราฟแสดงพฤติกรรมการลู่เข้า (a) และลู่ออก (b) ของตัวแปรของระบบ $X_n = AX_{n-1} + B$



(a) $x_n = 1.2x_{n-1} + 0.4y_{n-1} - 4.2$
$y_n = -0.4x_{n-1} + 0.7y_{n-1} + 4.4$
$x_0 = 0, y_0 = 6$

(b) $x_n = 3x_{n-1} - 2y_{n-1} - 10$
$y_n = 5x_{n-1} - 3y_{n-1} - 27$
$x_0 = 0, y_0 = -2$

รูปที่ 7 กราฟแสดงพฤติกรรมการเป็นวัฏจักรของตัวแปรของระบบ $X_n = AX_{n-1} + B$

การวิเคราะห์ระบบพลวัตวิยุตเชิงเส้นสองตัวแปรด้วยเทคนิคการคลี่

จากระบบพลวัตวิยุตเชิงเส้นสองตัวแปรที่กำหนดด้วยลำดับ $X_n = (x_n, y_n)$ มีค่าเริ่มต้น $X_0 = (x_0, y_0)$ และความสัมพันธ์เวียนเกิด $X_n = AX_{n-1} + B$ โดยพีชคณิตของเมทริกซ์เราสามารถทำการคลี่หรือแทนค่าย้อนกลับไปยังค่าเริ่มต้น X_0 ได้ในทำนองเดียวกันกับระบบพลวัตวิยุตเชิงเส้นหนึ่งตัวแปรดังนี้

$$
\begin{aligned}
X_n &= AX_{n-1} + B \\
&= A(AX_{n-2} + B) + B = A^2 X_{n-2} + AB + B \\
&= A^2(AX_{n-3} + B) + AB + B = A^3 X_{n-3} + A^2 B + AB + B \\
&\vdots \\
&= A^n X_0 + (A^{n-1} + A^{n-2} + \ldots + A + I)B
\end{aligned}
$$

ซึ่งจะใช้สมบัติทางเมทริกซ์เพื่อหาค่าของผลบวก

$$I + A + A^2 + \ldots + A^{n-1}$$

ในกรณีที่ $\| A \| < 1$ (เมื่อ $\| A \|$ คือค่าประจำของเมทริกซ์ (matrix norm)) จะได้ว่า A^n ลู่เข้าสู่เมทริกซ์ศูนย์ และทำให้ได้ว่า $I + A + A^2 + \ldots + A^{n-1}$ ลู่เข้าสู่เมทริกซ์ผกผันของ $I - A$ ดังนั้นจะสามารถหาลิมิตของ X_n ได้ และได้ว่า X_n ลู่เข้าสู่ $(I - A)^{-1}B$ (Datta, 1995) การหาค่าประจำของเมทริกซ์สามารถทำได้ 2 แบบ โดยสำหรับเมทริกซ์ $A = \left[a_{ij} \right]_{m \times m}$

$$\| A \|_r = \max\{ |a_{11}| + |a_{12}| + \ldots + |a_{1m}|, |a_{21}| + |a_{22}| + \ldots + |a_{2m}|, \ldots, |a_{m1}| + |a_{m2}| + \ldots + |a_{mm}| \}$$

และ

$$\|A\|_c = \max\{|a_{11}|+|a_{21}|+...+|a_{m1}|, |a_{12}|+|a_{22}|+...+|a_{m2}|, ..., |a_{1m}|+|a_{2m}|+...+|a_{mm}|\}$$

จะเห็นว่า $\|A\|_r$ คือผลบวกค่าสัมบูรณ์ของสมาชิกตามแถวมากสุด ในขณะที่ $\|A\|_c$ คือผลบวกค่าสัมบูรณ์ของสมาชิกตามสดมภ์มากสุด ในการพิจารณาว่า $\|A\|<1$ หรือไม่ จึงเพียงพอที่จะแสดงว่า $\|A\|_r<1$ หรือ $\|A\|_c<1$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}0.5 & -0.4\\ 0.2 & 0.6\end{bmatrix}$ จะได้ว่า $\|A\|_r = \max\{|0.5|+|-0.4|, |0.2|+|0.6|\}=0.9$ และ $\|A\|_c = \max\{|0.5|+|0.2|, |-0.4|+|0.6|\}=1.0$ เนื่องจาก $\|A\|_r<1$ จึงเพียงพอที่จะทำให้ A^n ลู่เข้าสู่เมทริกซ์ศูนย์ ดังจะเห็นได้จากตัวอย่างการคำนวณต่อไปนี้

$$A^2=\begin{bmatrix}0.17 & -0.44\\ 0.22 & 0.28\end{bmatrix},\quad A^5=\begin{bmatrix}-0.07355 & -0.09164\\ 0.04582 & -0.05064\end{bmatrix},\quad A^{10}=\begin{bmatrix}0.0012107 & 0.0113808\\ -0.0056904 & -0.0016345\end{bmatrix}$$

$$A^{20}=\begin{bmatrix}-0.0000633 & -0.0000048\\ 0.0000024 & -0.0000621\end{bmatrix},\quad A^{30}=\begin{bmatrix}0.0000000 & -0.0000007\\ 0.0000004 & 0.0000001\end{bmatrix},\ \ldots$$

สำหรับระบบพลวัตวิยุตเชิงเส้นตั้งแต่สามตัวแปรขึ้นไป สามารถพิจารณาและวิเคราะห์ได้ในทำนองเดียวกันกับระบบพลวัตวิยุตเชิงเส้นสองตัวแปร

ตัวอย่างการประยุกต์ใช้งาน

พิจารณาระบบพลวัตวิยุตเชิงเส้นหนึ่งตัวแปรของปัญหาต่อไปนี้

ผู้ป่วยคนหนึ่งเข้ารับการรักษาโรคร้ายแรงชนิดหนึ่งซึ่งจะต้องได้รับยาปฏิชีวนะทุกวัน วันละครั้ง ในแต่ละวันร่างกายของผู้ป่วยสามารถขับยาออกจากร่างกายได้ $1/3$ เท่าของปริมาณยาที่มีอยู่ในกระแสเลือด ณ วันนั้น เพื่อให้การรักษามีประสิทธิภาพ ผู้ป่วยจะต้องมีปริมาณยาสะสมในร่างกายประมาณ 5 มิลลิกรัม ดังนั้นแพทย์ควรจะให้ยากับผู้ป่วยวันละเท่าไร และจะต้องให้ยาติดต่อกันกี่วัน จึงจะได้ปริมาณยาสะสมในร่างกายใกล้เคียงกับปริมาณที่ต้องการดังกล่าว

จากปัญหานี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของระบบพลวัตวิยุตเชิงเส้นหนึ่งตัวแปรได้ โดยให้ x_n เป็นปริมาณของยา (มิลลิกรัม) ในร่างกายของผู้ป่วยในวันที่ n และให้ b เป็นปริมาณยา (มิลลิกรัม) ที่ต้องให้กับผู้ป่วยในแต่ละวัน ซึ่งเขียนระบบพลวัตวิยุตเชิงเส้นได้เป็น $x_n=\frac{2}{3}x_{n-1}+b$ จะเห็นว่า $\frac{2}{3}<1$ ดังนั้น x_n ลู่เข้าสู่ $\frac{b}{1-2/3}=3b$ เนื่องจากต้องการให้มีปริมาณยาสะสมในร่างกายผู้ป่วยประมาณ 5 มิลลิกรัม นั่นคือ x_n ลู่เข้าสู่ 5 จะได้ว่า $b=\frac{5}{3}\approx 1.67$ นั่นคือ จะต้องให้ยากับผู้ป่วยวันละ 1.67 มิลลิกรัม ติดต่อกัน 15 วัน โดย $x_{15}=4.999$ ใกล้เคียงค่าที่ต้องการมากที่สุด ซึ่งปริมาณยาที่สะสมในร่างกายในแต่ละวันสามารถพิจารณาได้จากตารางที่ 1

ตารางที่ 1 แสดงค่าของตัวแปรของตัวแบบ $x_n = \frac{2}{3}x_{n-1} + 1.67$, $n \geq 2$ โดยที่ $x_1 = 1.67$

วันที่ n	**ปริมาณยาสะสมในร่างกาย** x_n **(มิลลิกรัม)**	**วันที่** n	**ปริมาณยาสะสมในร่างกาย** x_n **(มิลลิกรัม)**
1	1.670	9	4.880
2	2.783	10	4.923
3	3.526	11	4.952
4	4.020	12	4.971
5	4.350	13	4.984
6	4.570	14	4.993
7	4.717	15	4.999
8	4.815	16	5.002

สำหรับการประยุกต์ใช้งานระบบพลวัตวิยุตเชิงเส้นสองตัวแปร สามารถพิจารณาได้จากตัวอย่างที่ 3 ซึ่งมีระบบสมการ $X_n = AX_{n-1} + B$ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.01 \\ 0.3 & 0.89 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

เมื่อ

$$X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.01 \\ 0.3 & 0.89 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $\| A \|_c = \max\{|0.3| + |0.3|, |0.01| + |0.89|\} = 0.9 < 1$ ดังนั้น X_n ลู่เข้าสู่ $(I - A)^{-1} B = \begin{bmatrix} 1.487 \\ 4.054 \end{bmatrix}$ นั่นคือเมื่อเรารับวิตามินเอเข้าสู่ร่างกายวันละ 1 มิลลิกรัมต่อเนื่องกันเป็นระยะเวลานาน ปริมาณของวิตามินเอจะสะสมในพลาสมาและตับเป็น 1.487 และ 4.054 มิลลิกรัม ตามลำดับ

สรุป

บทความนี้ได้แนะนำระบบพลวัตวิยุตเชิงเส้น ซึ่งเป็นตัวแบบที่ได้จากปัญหาต่าง ๆ ในชีวิตประจำวันของเรา โดยพฤติกรรมของระบบมีลักษณะแตกต่างกันออกไป มีทั้งลู่เข้าและลู่ออก แบบทางเดียวและแบบกวัดแกว่ง การวิเคราะห์ระบบนั้นสามารถทำได้โดยใช้เทคนิคการคลี่ ซึ่งเป็นเทคนิคพื้นฐานที่สำคัญ รวมถึงใช้สมบัติของอนุกรมเรขาคณิตและเมทริกซ์มาช่วยในการพิจารณา นอกจากระบบพลวัตวิยุตเชิงเส้นที่ได้กล่าวมาแล้ว ยังมีปัญหาอีกจำนวนมากที่ต้องกำหนดด้วยระบบพลวัตวิยุตไม่เชิงเส้น ซึ่งมีรูปแบบ พฤติกรรม และสมบัติที่แตกต่างและน่าสนใจ ซึ่งจะได้นำเสนอในโอกาสต่อไป

เอกสารอ้างอิง

Datta, B. N. (1995). Numerical Linear Algebra and Applications. (1st ed.). Pacific Grove, California: Brooks/Cole. 22-35.

Marotto, F. R. (2006). Introduction to Mathematical Modeling Using Discrete Dynamical Systems. (1st ed.). Belmont, California: Brooks/Cole. 197-201.

Sandefur, J. (2003). Elementary Mathematical Modeling. (1st ed.). Pacific Grove, California: Brooks/Cole. 16-18.