



ผลกระทบของสปินต่อการมีเสถียรภาพของสสาร Effect of Spin on the Stability of Matter

ชัยพจน์ มุทาพร¹

บทคัดย่อ

ช่วงแรกของศตวรรษที่ 20 เราคาดว่าหลักการกีดกันของเพาลีซึ่งว่าด้วยสถิติของสสารที่มีสปินครึ่งนั้นเป็นสิ่งจำเป็นในการป้องกันไม่ให้อะตอมเปลี่ยนแปลงเข้าสู่สถานะความหนาแน่นสูง และหลักการดังกล่าวเป็นสาเหตุที่ทำให้สสารมีเสถียรภาพอยู่ได้ แต่ก็ไม่มีผู้ที่สามารถพิสูจน์ถึงความจำเป็นของหลักการดังกล่าวได้ จนกระทั่งปี 1967 ฟรีแมน ไดสัน เป็นบุคคลแรกที่สามารถแสดงให้เห็นว่าสสารที่ละทิ้งหลักการกีดกันของเพาลีจะเป็นระบบสสารที่ไม่มีเสถียรภาพ ในบทความนี้เราจะกล่าวถึงภาพรวมของหลักการทางคณิตศาสตร์ที่ไดสันใช้พิสูจน์ความจำเป็นของสปินต่อการมีเสถียรภาพของสสาร และเรายังได้พูดถึงความหมายของการมีเสถียรภาพของสสารพร้อมทั้งอธิบายหลักการสำคัญในการสรุปว่าระบบใดมีความเสถียรหรือไม่เสถียร สุดท้ายเราได้เปรียบเทียบให้เห็นพลังงานที่ปลดปล่อยออกมาอันเนื่องมาจากการรวมกันของสสารสองระบบที่มีจำนวนอนุภาคพอ ๆ กันกับจำนวนอนุภาคในหลอดทดลองนั้นมีความมหัศจรรย์ ซึ่งเป็นเครื่องบ่งชี้ได้เป็นอย่างดีว่าสสารที่ปราศจากสปินจะไม่สามารถมีเสถียรภาพอยู่ได้ สปินจึงจำเป็นต่อการมีเสถียรภาพของสสารเป็นอย่างยิ่ง

¹ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น อ.เมือง จ.ขอนแก่น 40002

ABSTRACT

It was already expected as early as the beginning of the 20th century that the Pauli exclusion principle, involved with spin $\frac{1}{2}$ statistics, was necessary to prevent matter from making a high density phase transition and ensure its stability. The actual theoretical demonstration that matter would be unstable if the exclusion principle is abolished came much later through the rigorous study of Freeman Dyson in 1967. In this article, we review the elegant work of Dyson as well as subsequent mathematically rigorous studies carried out of such “bosonic matter” and, in the process, pin point the physical meaning of stability of matter. In particular, we investigate the enormous energy already released by bringing into contact two bosonic systems each containing a number of particles comparable to those found in a test tube, thus providing a clear cut explanation of the instability of matter without the exclusion principle.

คำสำคัญ: เสถียรภาพของสสาร สสารชนิดโบซอน การยุบตัวของสสารโบซอน

Keywords: Stability of matter, Bosonic matter, Collapse of bosonic matter

บทนำ

ช่วงเวลาก่อนที่เพาลีจะเสนอหลักการกีดกันเพาลีนั้น เป็นช่วงเวลาเริ่มต้นของการพัฒนาทฤษฎีควอนตัม มีการค้นพบโดยรัทเทอร์ฟอร์ด (Rutherford) ว่าภายในอะตอมประกอบด้วยนิวเคลียสที่มีอนุภาคประจุบวก และรอบ ๆ นิวเคลียสเป็นอนุภาคประจุลบมีอันตรกิริยากันแบบคูลอมบ์ (Coulomb interaction) อนุภาคประจุบวกที่วาก์คืออนุภาคโปรตอน ส่วนอนุภาคประจุลบคืออิเล็กตรอน ต่อมาในปี 1913 นีล บอห์ร (Niels Bohr) ได้เสนอโมเดลของอะตอมอันแรกที่ประสบความสำเร็จเป็นอย่างมากในการอธิบายสเปกตรัมการแผ่รังสีแม่เหล็กไฟฟ้าของอะตอมไฮโดรเจนในช่วงที่ตามองเห็น (อนุกรม Balmer) เขาใช้ทฤษฎีของแมกซ์ พลังค์ (Max Planck) ซึ่งเป็นทฤษฎีที่ใช้อธิบายสเปกตรัมการแผ่รังสีเชิงความร้อนของวัตถุด้วยการแบ่งระดับพลังงานออกเป็นขั้น ๆ ไม่ต่อเนื่อง โดยอาศัยโมเดลอะตอมของรัทเทอร์ฟอร์ดที่มีประจุบวกเป็นนิวเคลียส บอห์รได้เสนอโมเดลอะตอมที่มีลักษณะคล้ายกับการเคลื่อนของดาวเคราะห์ในระบบสุริยะโดยมีอิเล็กตรอนโคจรเป็นวงกลมรอบนิวเคลียส อันตรกิริยาระหว่างนิวเคลียสกับอิเล็กตรอนเป็นอันตรกิริยาแบบคูลอมบ์ และบอห์รได้ตั้งสมมติฐานที่เป็นสิ่งแปลกใหม่อย่างมากในสมัยนั้นว่า โมเมนตัมเชิงมุมของอิเล็กตรอนในอะตอมมีค่าแน่นอนได้บางค่าเท่านั้น จากสมมติฐานข้อนี้ทำให้เราคำนวณหาระดับพลังงานของอิเล็กตรอนได้แน่นอนบางค่าและไม่ต่อเนื่อง ซึ่งทำให้เกิดข้อขัดแย้งกับฟิสิกส์แบบดั้งเดิมซึ่งเห็นว่าแรงคูลอมบ์ระหว่างนิวเคลียสกับอิเล็กตรอนเป็นแรงดูด เมื่ออิเล็กตรอนโคจรรอบนิวเคลียสเป็นวงกลมจะแผ่รังสีแม่เหล็กไฟฟ้าออกมาทำให้มีการสูญเสียพลังงาน ในที่สุดรัศมีวงโคจรของอิเล็กตรอนจะค่อย ๆ ลดลงเรื่อย ๆ (ทำให้รัศมีมีค่าต่อเนื่อง) และสุดท้ายจะถูกดูดเข้าสู่นิวเคลียสทำให้อะตอมไฮโดรเจนสูญเสียสลายไป และแน่นอนว่าสมมติฐานของบอห์รนั้นถูกต้องและสามารถอธิบายการแผ่รังสีของอะตอม

ไฮโดรเจนได้อย่างสมบูรณ์แบบ จึงเกิดคำถามว่าทำไมอิเล็กตรอนไม่ถูกดูดเข้าสู่นิวเคลียส และเมื่อเราเพิ่มจำนวนของอิเล็กตรอนในระบอบสสารแล้วทำไมก้อนสสารกลับมีปริมาตรหรือขนาดใหญ่ขึ้น (Ehrenfest, 1931, 1959) คำตอบของคำถามนี้คือหลักการกีดกันของเพาลี (Pauli exclusion principle) นั่นเอง อิเล็กตรอนสองตัวไม่สามารถครอบครองสถานะทางควอนตัมเดียวกันได้ ดังนั้นก้อนสสาร (bulk matter) ที่ประกอบด้วยอะตอมจำนวนมากมหาศาลจึงมีขนาดใหญ่เรื่อย ๆ ตามจำนวนของอะตอมที่ประกอบเป็นก้อนสสารนั้น หลักการกีดกันของเพาลีจึงจำเป็นอย่างยิ่งต่อการมีเสถียรภาพของสสาร คำตอบนี้ทำให้เกิดคำถามตามมาว่าหลักการกีดกันของเพาลีจำเป็นต่อการมีเสถียรภาพของสสารจริงไหม และเราจะพิสูจน์โดยใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์ได้อย่างไรว่าหลักการกีดกันของเพาลีเป็นคำตอบจริง ๆ

ปัจจุบันเรารู้จักหลักการกีดกันของเพาลีในนาม ทฤษฎีบทสปินเชิงสถิติ (spin-statistics theorem) (Stoner, 1924; Pauli, 1925; Pauli and Weisskopf, 1934; Pauli, 1936; Iwanenko and Sokolow, 1937; Fierz, 1939; Pauli and Belinfante, 1940; de Wet, 1940; Pauli, 1950; Wightman, 1956; Schwinger, 1958a, 1958b; Burgoyne, 1958; Lüders and Zumino, 1958; Jost, 1960; Brown and Schwinger, 1961) ซึ่งกล่าวไว้ว่าอนุภาค 2 อนุภาคที่เหมือนกันทุกประการและมีสปินเป็นเลขคี่จำนวนเต็ม (สสารประเภทเฟอร์มิออน) จะไม่สามารถครอบครองสถานะทางควอนตัมเดียวกันได้ ส่วนอนุภาคที่เหมือนกันทุกประการและมีสปินเป็นเลขจำนวนเต็ม (สสารประเภทโบซอน) จะสามารถครอบครองสถานะทางควอนตัมเดียวกันได้อย่างไม่จำกัดจำนวน (Pauli, 1940) ในหนังสือ The Story of Spin ซึ่งแต่งโดย ซินอิชิโร โทโมนากะ (Sin-Itiro Tomonaga) (Tomonaga, 1997) แพลโดยทาเกชิ โอกะ (Takeshi Oka) ได้กล่าวถึงความสำคัญของสปินว่า “การปรากฏของสปินและทฤษฎีบทสปินเชิงสถิติถือว่าการสร้างสรรค์อันชาญฉลาดของธรรมชาติ ถ้าสสารปราศจากสปินแล้ว เอกภพทั้งหมดจะไม่สามารถดำรงอยู่ได้และพังทลายลงในที่สุด” นอกจากนี้ฟรีแมน ไดสัน (Freeman Dyson) (Dyson, 1967) ยังได้กล่าวถึงก้อนสสารที่ประกอบขึ้นมาจากอนุภาคที่ไม่มีสปินเป็นเลขคี่จำนวนเต็มว่า “ก้อนสสารจะยุบตัวสู่สภาวะที่มีความหนาแน่นสูง เมื่อก้อนสสารสองก้อนใด ๆ รวมกันมันจะปลดปล่อยพลังงานมหาศาลเทียบเท่าที่ระเบิดปรมาณูออกมา” จะเห็นว่าทฤษฎีบทสปินเชิงสถิติมีความสำคัญต่อเราอย่างมาก เพราะสสารในโลกนี้ประกอบด้วยอนุภาคอิเล็กตรอน ซึ่งมีพฤติกรรมเป็นไปตามทฤษฎีบทสปินเชิงสถิติสำหรับอิเล็กตรอนหรือในอดีตเราเรียกว่า “หลักการกีดกันของเพาลี” ทำให้อิเล็กตรอน 2 ตัวที่อยู่ในอะตอมเดียวกันไม่สามารถครอบครองสถานะทางควอนตัมเดียวกันได้ ดังนั้นการที่อิเล็กตรอนมีสปินจึงทำให้โลกเราคงอยู่ ถ้าสสารในโลกไม่มีสปินหรือการหมุนรอบตัวเอง (สปินเท่ากับ 0) โลกเราคงไม่มีเสถียรภาพและคงไม่มีโลกปรากฏอยู่ดังเช่นทุกวันนี้ และที่สุดแล้วตัวเราเองก็คงไม่สามารถปรากฏอยู่ ณ ปัจจุบันนี้ด้วยเหมือนกัน ดังนั้นการศึกษาเกี่ยวกับเสถียรภาพของสสารจึงเป็นหัวข้อสำคัญมากหัวข้อหนึ่งของวงการฟิสิกส์ทฤษฎี

ในช่วงทศวรรษ 1920 หลังจากการเพาลีเสนอหลักการกีดกันของเพาลี ยังไม่มีงานวิจัยชิ้นใดที่สามารถพิสูจน์ด้วยการคำนวณทางคณิตศาสตร์ได้อย่างแน่นอนตรงว่าหลักการกีดกันของเพาลีจำเป็นต่อการมีเสถียรภาพของสสาร จนกระทั่งในปี 1967 ได้มีนักฟิสิกส์คนแรกที่สามารถพิสูจน์ปัญหาดังกล่าวได้ นักฟิสิกส์คนนั้นคือ ฟรีแมน ไดสัน โดยเขาตั้งสมมติฐานว่าถ้าสปินจำเป็นต่อการมีเสถียรภาพของสสารจริงแล้ว ดังนั้นถ้าหากมีใครซักคนทำให้สปิน

ของอิเล็กตรอนและโปรตอนในสสารเป็นศูนย์ แล้วทำให้สปินของอนุภาคทั้งหมดเท่ากับ 0 (เราเรียกสสารนี้ว่า “สสารประเภทโบซอน”) ระบบสสารอันนั้นจะไม่มีเสถียรภาพ ระบบที่ได้สันนิษฐานว่าเป็นระบบที่นิวเคลียสไม่จำเป็นต้องถูกต้องอยู่กับที่ (อาจถือว่าเป็นระบบที่ไม่มีนิวเคลียสก็ได้) และทุกอนุภาคมีมวลที่แน่นอน ระบบเป็นกลางทางไฟฟ้า เขาสามารถคำนวณขอบเขตบนของพลังงานสถานะพื้นของระบบมีค่าขึ้นกับ $N^{7/5}$ เมื่อ N คือจำนวนอนุภาคประจุลบในระบบ งานวิจัยของโดสันได้ถูกปรับปรุงให้ค่าขอบเขตบนของพลังงานสถานะพื้นมีค่าเข้าใกล้เคียงค่าจริงมากยิ่งขึ้นโดยมานูเกียนและมูทาพร (Manoukian and Muthaporn, 2002) โดยได้ขอบเขตบนของพลังงานสถานะพื้นมีค่าขึ้นกับ $N^{7/5}$ เหมือนกับผลการคำนวณของโดสัน นอกจากนี้เราจะกล่าวถึงงานวิจัยของอีเลียต ลีบ (Elliott H. Lieb) (Lieb, 1979) ที่คำนวณหาขอบเขตบนของพลังงานสถานะพื้นของระบบในกรณีที่มีนิวเคลียสของระบบถูกต้องอยู่กับที่ และจำนวนอนุภาคประจุลบมีค่าเท่ากับ $N = 8, 64, 216, \dots$ กรณีเลขอะตอมของแต่ละนิวเคลียสเท่ากับ 1 โดยงานวิจัยของลีบได้ถูกปรับปรุงโดยมานูเกียนและมูทาพร (Manoukian and Muthaporn, 2003) ให้ใช้สำหรับกรณีทั่วไปได้มากยิ่งขึ้น คือ $N = 8, 9, 10, \dots$ โดยที่ขอบเขตบนของพลังงานสถานะพื้นที่คำนวณได้มีค่าขึ้นกับ $N^{5/3}$ แสดงให้เห็นถึงความไม่มีเสถียรภาพของระบบก๊อสนสสารที่ถูกหยุดสปิน เราจะอธิบายความหมายของขอบเขตบนของพลังงานสถานะพื้นของสสารต่อการมีเสถียรภาพของสสารในหัวข้อถัดไป

ส่วนคำถามว่าทำไมขนาดของก๊อสนสสารถึงได้เพิ่มขึ้นเมื่อเราเพิ่มจำนวนของอิเล็กตรอน คำตอบของคำถามนี้ได้รับการพิสูจน์อย่างแม่นยำโดยมานูเกียนและสิรินินกุล (Manoukian and Sirininlaku, 2005) พวกเขาได้เสนอว่าเพื่อให้ความน่าจะเป็นที่เราจะพบอิเล็กตรอนในทรงกลมรัศมี R ที่ครอบครองโดยสสารนั้นไม่เข้าสู่อันันต์ (สามารถหาค่าได้) รัศมี R ของทรงกลมจำเป็นต้องเพิ่มขึ้นในสัดส่วนไม่น้อยกว่า $N^{1/3}$ เมื่อ N คือจำนวนอิเล็กตรอนในระบบและมีค่ามาก ๆ ดังนั้นยังเพิ่มจำนวนอิเล็กตรอน รัศมีของระบบยิ่งเพิ่มขึ้น เราหวังว่าจะได้กล่าวถึงรายละเอียดวิธีการคำนวณของงานวิจัยนี้ในบทความถัดไป สำหรับบทความนี้จะกล่าวถึงการพิสูจน์ความจำเป็นของสปินต่อเสถียรภาพของสสารเท่านั้น

เสถียรภาพและการไร้เสถียรภาพของสสารกับพลังงานสถานะพื้นของระบบ

การพิจารณาว่าระบบใดจะเสถียรหรือไม่เสถียรนั้นเราจะพิจารณาที่พลังงานสถานะพื้นของระบบ (Lieb, 1991) ถ้าพลังงานสถานะพื้นเพิ่มขึ้นในลักษณะเชิงเส้นกับจำนวนอนุภาค N ในระบบ เราถือว่าระบบนั้นมีเสถียรภาพ ยกตัวอย่างเช่น ถ้าให้ $E(N)$ เป็นพลังงานสถานะพื้นของระบบ N อนุภาค ถ้าระบบนี้มีเสถียรภาพ แสดงว่า $\lim_{N \rightarrow \infty} E(N)/N$ สามารถหาค่าได้ (Fisher and Ruelle, 1966) หรือพลังงานต่อจำนวนอนุภาคเข้าสู่ค่าจำกัดค่าหนึ่งเมื่อจำนวนอนุภาคมีค่ามาก ๆ ในกรณีของอะตอมของสสารรอบ ๆ ตัวเรานั้นประกอบด้วยอิเล็กตรอนและนิวเคลียส โดยมีอันตรกิริยาระหว่างอนุภาคคืออันตรกิริยาทางไฟฟ้า หรืออาจเป็นอันตรกิริยาโน้มถ่วงร่วมด้วยก็ได้ (Dyson and Lenard, 1967) ดังนั้นถ้าระบบสสารมีประจุลบหรือประจุบวกเป็นสสารชนิดเฟอร์มิออนทั้งหมดแล้ว พลังงานสถานะพื้นของระบบ $E(N)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของ N และแน่นอนเราสามารถหาขีดจำกัดของ $\lim_{N \rightarrow \infty} E(N)/N$ ได้ แสดงให้เห็นถึงความมีเสถียรภาพของระบบนี้ แต่ถ้าระบบใดมีพลังงาน

สถานะพื้น $E(N)$ แปรตาม N^α ที่ $\alpha > 1$ (Dyson, 1967) ระบบนี้จะไม่เสถียรภาพ ทั้งนี้เป็นเพราะเมื่อเรา รวมระบบสองระบบโดยแต่ละระบบมีอนุภาคประจุลบ N พลังงานสถานะพื้นเริ่มต้นของระบบจะขึ้นกับ $2N^\alpha$ หลังจากรวมแล้วระบบสุดท้ายจะมีอนุภาคประจุลบทั้งหมด $2N$ อนุภาค พลังงานสถานะพื้นสุดท้ายของระบบ รวมจึงมีค่าขึ้นกับ $(2N)^\alpha$ ทำให้พลังงานที่ปลดปล่อยออกมามีค่าขึ้นกับ $(2N)^\alpha - 2N^\alpha$ ปกติเมื่อเรารวม ระบบอนุภาคเข้าด้วยกัน จำนวนอนุภาคในหลอดทดลองของเราอยู่ในระดับ N ประมาณ 10^{23} อนุภาค จะเห็นว่ากรณีที่จำนวนอนุภาคมีปริมาณมหาศาลเช่นนี้ พลังงานที่ปลดปล่อยออกมาจะมากมายมหาศาลเทียบเท่ากับ พลังงานของระเบิดปรมาณูและคงไม่มีระบบใดที่คงอยู่ได้ในสภาวะนั้น แต่การคำนวณหาพลังงานสถานะพื้นของ ระบบที่มีอนุภาคจำนวนมากแทบจะเป็นไปไม่ได้เลย เราจึงหาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของพลังงานสถานะพื้น แทน โดยมีหลักการพิจารณาแบ่งเป็น 4 กรณี ดังนี้

1) เรากำหนด α และ C เป็นเลขจำนวนจริง โดยที่ $\alpha > 1$ ดังนั้น $-CN^\alpha < -CN$ เมื่อ $C > 0$ ถ้าเราสามารถพิสูจน์ได้ว่าพลังงานสถานะพื้นของระบบ $E_N < -CN^\alpha$ แล้วจะได้ $E_N < -CN^\alpha < -CN$ จะเห็นว่าพลังงานสถานะพื้นของระบบนี้มีค่าน้อยกว่า $-CN^\alpha$ ค่าตรงนี้คือขอบเขตบนของพลังงานสถานะพื้น ดังนั้น พลังงานสถานะพื้นไม่มีสิทธิ์แปรผันโดยตรงกับ $-CN$ ได้เลยเนื่องจาก $-CN^\alpha < -CN$ ดังนั้นเราสามารถสรุป ได้ว่า ระบบนี้ไม่เสถียร

2) กรณีที่เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $E_N < -CN$ แม้ว่าขอบเขตบนของพลังงานสถานะพื้นมีค่าแปรผัน ตรงกับ N ที่มีเลขชี้กำลังเท่ากับ 1 ถ้าเราดูเฉพาะตรงนี้เราอาจจะบอว่าระบบนี้มีเสถียรภาพ แต่ในความเป็นจริง แล้วการพิสูจน์นี้ไม่สามารถบ่งชี้ว่าระบบที่เราพิจารณาเป็นระบบที่เสถียร ทั้งนี้เนื่องจากพลังงานสถานะพื้นยังมี โอกาสแปรผันโดยตรงกับ N^α โดยที่ $\alpha > 1$ นั่นคือ $E_N \sim -DN^\alpha$ แสดงให้เห็นถึงการไร้เสถียรภาพของระบบ และยังคงทำให้ $E_N \sim -DN^\alpha < -CN$ ยังคงเป็นจริง ดังนั้นจะเกิดข้อขัดแย้งกันเอง การพิสูจน์ว่า $E_N < -CN$ จึงไม่ให้ข้อสรุปที่แน่นอนกับเราว่าระบบที่เราพิจารณาเป็นระบบที่เสถียรหรือไม่เสถียรกันแน่

3) กรณีที่เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $E_N > -DN^\alpha$ แม้ว่าขอบเขตล่างของพลังงานสถานะพื้นจะขึ้นกับ N^α ซึ่งแสดงให้เห็นถึงเสถียรภาพของระบบ แต่เนื่องจากพลังงานสถานะพื้นยังมีโอกาสแปรผันตรงกับ N ได้ และยังคงทำให้ $E_N \sim -CN > -DN^\alpha$ เป็นจริง ดังนั้นการพิสูจน์ว่า $E_N > -DN^\alpha$ จึงไม่ให้ข้อสรุปที่แน่นอนกับเราว่าระบบที่เราพิจารณาเป็นระบบที่เสถียรหรือไม่เสถียรกันแน่

4) กรณีที่เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $E_N > -CN$ ในกรณีนี้เราสามารถสรุปได้ทันทีว่า ระบบที่เรา พิจารณาเป็นระบบที่เสถียร เนื่องจาก $E_N > -CN > -DN^\alpha$ พลังงานสถานะพื้นไม่มีสิทธิ์ขึ้นกับ N^α ได้เลย เนื่องจากขอบเขตล่างของพลังงานสถานะพื้นขึ้นกับ N แล้ว

จาก 4 กรณีข้างต้นเราสามารถสรุปได้ว่า การจะพิจารณาว่าระบบใดเป็นระบบที่เสถียรหรือไม่เสถียรนั้น เราสามารถพิสูจน์ได้จากเพียงแค่ 2 กรณีคือ การพิสูจน์ความไม่เสถียร (ไร้เสถียรภาพ) ของระบบเราจะดูที่ขอบเขต บนของพลังงานสถานะพื้น นั่นคือระบบที่ไม่มีเสถียรภาพจะมีขอบเขตบนของพลังงานสถานะพื้นมีค่าขึ้นกับ N^α , $\alpha > 1$ ส่วนการพิสูจน์ว่าระบบใดมีเสถียรภาพนั้น เราจะดูที่ขอบเขตล่างของพลังงานสถานะพื้น โดยระบบที่มี เสถียรภาพจะมีขอบเขตล่างของพลังงานสถานะพื้นมีค่าขึ้นกับ N

กรณีระบบก้อนสสารประเภทโบซอนมีนิวเคลียสเคลื่อนที่ และทุกอนุภาคมีมวลที่หาค่าได้

ในปี 1967 ไตสันได้พิสูจน์ถึงความจำเป็นของสปินต่อการมีเสถียรภาพของสสารได้เป็นคนแรก โดยมีหลักการพิสูจน์คือ “หากว่าสปินจำเป็นต่อการมีเสถียรภาพของสสารแล้ว ระบบสสารที่สปินของอิเล็กตรอนและโปรตอนถูกทำให้เท่ากับศูนย์ ระบบสสารนั้นจะไม่เสถียร นั่นคือขอบเขตบนของพลังงานสถานะพื้นของระบบมีค่าขึ้นกับ N^α โดยที่ $\alpha > 1$ ” และเขาสามารถพิสูจน์ได้ว่าขอบเขตบนของพลังงานสถานะพื้นมีค่าขึ้นกับ $N^{7/5}$ ระบบสสารที่พิจารณาเป็นระบบอย่างง่าย มีความเป็นกลางทางไฟฟ้า ประกอบด้วยอนุภาคประจุลบ N อนุภาค และอนุภาคประจุบวก N อนุภาค (จำนวนอนุภาครวมเท่ากับ $2N$) สปินเท่ากับ 0 มีอันตรกิริยาระหว่างอนุภาคแบบคูโลมบ์ โดยมีฮามิลโทเนียนของระบบคือ

$$H = \sum_{i=1}^{2N} \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + \sum_{i < j}^{2N} \frac{e^2 \varepsilon_i \varepsilon_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} \quad (1)$$

เมื่อ $\varepsilon_i, \varepsilon_j = \pm 1$, m คือมวลที่น้อยที่สุดของอนุภาคในระบบ และ \vec{x}_i, \vec{x}_j เป็นตำแหน่งของอนุภาคตัวที่ i และ j ตามลำดับ จะเห็นว่านิวเคลียสของระบบนี้เคลื่อนที่ได้ นั่นคือทุกอนุภาคมีพลังงานจลน์ได้

ฟังก์ชันคลื่นที่ไตสันใช้หาค่าคาดหวังของฮามิลโทเนียนนั้นเป็นฟังก์ชันคลื่นของระบบอนุภาคที่ประกอบด้วยจำนวนอนุภาค $2N$ (ประจุบวก N อนุภาคและประจุลบ N อนุภาค) กำหนดด้วยฟังก์ชันคลื่น Ψ_{2N} ซึ่งเป็นฟังก์ชันพื้นฐานของระบบ $2N$ อนุภาค (Dyson, 1967) ฟังก์ชันนี้มีรูปแบบคล้ายกับฟังก์ชันคลื่นในสถานะพื้นในทฤษฎีสสารตัวนำยิ่งยวดของ Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) (Bardeen et al., 1957) และเขียนได้ดังสมการด้านล่าง

$$\Psi_{2N}(\vec{x}_1, u_1, \dots, \vec{x}_{2N}, u_{2N}) = \sum_P \prod_{j=1}^N G(\vec{x}_{P_{2j-1}}, u_{P_{2j-1}}, \vec{x}_{P_{2j}}, u_{P_{2j}}) \quad (2)$$

เมื่อ P แทนการสลับที่ใด ๆ ของเลขจำนวนเต็ม $1, \dots, 2N$ โดย \vec{x}_j เป็นเวกเตอร์ในพิทักด 3 มิติ และ $u_j = \pm 1$ เป็นค่าที่กำหนดว่าอนุภาคที่พิจารณาเป็นอนุภาคประจุบวกหรือลบ ส่วนฟังก์ชัน G เป็นฟังก์ชันคลื่นแบบสมมาตรของ 2 อนุภาคใด ๆ แทนด้วย

$$G(\vec{x}_1, u_1, \vec{x}_2, u_2) = \lambda_0 \psi_0(\vec{x}_1) \psi_0(\vec{x}_2) - u_1 u_2 \sum_{\alpha > 0} \lambda_\alpha \psi_\alpha(\vec{x}_1) \psi_\alpha(\vec{x}_2) \quad (3)$$

โดย $\psi_\alpha(\vec{x})$ เป็นฟังก์ชันสถานะลำดับที่ α ณ ตำแหน่ง \vec{x} ซึ่งเราจะแทนฟังก์ชันนี้ด้วยฟังก์ชัน sine หากเราต้องการฟังก์ชันคลื่นแบบ BCS เราเพียงแค่วางฟังก์ชันคลื่นแบบสมมาตรด้วยฟังก์ชันคลื่นแบบอสมมาตร และแทนชนิดประจุ (u_j) ด้วยพิกัดสปิน (spin coordinate) ฟังก์ชันคลื่น Ψ_{2N} จะเป็นตัวแทนของสถานะของระบบ $2N$ อนุภาคที่อนุภาคหนึ่งจะถูกจับคู่กับอีกอนุภาคหนึ่ง และแต่ละคู่อนุภาคมีรูปแบบฟังก์ชันคลื่นเหมือนกันคือฟังก์ชัน G เราอาจเรียกคู่ของอนุภาคเหล่านี้เรียกว่า “Bogoliubov pairs” (Bogoliubov, 1947) ซึ่งเทียบได้กับ “Cooper pairs” ในทฤษฎีสสารตัวนำยิ่งยวด (Cooper, 1956; Dyson, 1967) เนื่องจากฟังก์ชันคลื่น Ψ_{2N} ไม่

จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชันคลื่นของระบบเมื่ออยู่สถานะพื้น ดังนั้นค่าคาดหวังของแฮมิลโทเนียนของระบบนี้จะมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับค่าพลังงานสถานะพื้นจริง ๆ ของระบบเสมอ และเขาสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$E_{2N,2N} \leq \frac{\langle \Psi_{2N} | H | \Psi_{2N} \rangle}{\|\Psi_{2N}\|^2} \equiv H_{2N} \quad (4)$$

เมื่อ $E_{2N,2N}$ คือพลังงานสถานะพื้นของระบบที่ประกอบด้วยอนุภาคประจุบวก $2N$ อนุภาคและอนุภาคประจุลบ $2N$ อนุภาค และ H_{2N} เป็นค่าคาดหวังของแฮมิลโทเนียน โดยใช้คณิตศาสตร์ที่สลับซับซ้อน (complicated variational calculation) (Leib, 1979) ได้สามารถคำนวณค่าคาดหวังได้เท่ากับเท่ากับ

$$H_{2N} = \beta_N \left[\sum_{\alpha=1}^k T_{\alpha} - kT_0 + \frac{1}{3}(k-2) \sum_{\alpha=1}^k I_{0\alpha} \right] + 2N \left[T_0 - \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^k I_{0\alpha} \right] \quad (5)$$

เมื่อ β_N คือสัมประสิทธิ์ของไดสัน (Dyson coefficient) โดย $\beta_N < 1$ T_{α} , T_0 พลังงานจลน์ซึ่งมีค่าเป็นบวก $I_{0\alpha}$ เป็นพลังงานศักย์ซึ่งเกิดจากอันตรกิริยาระหว่างอนุภาค และ k เป็นค่าคงที่ใด ๆ ที่แสดงจำนวนสถานะที่เป็นไปได้ทั้งหมดของอนุภาคในระบบ เมื่อแทนค่า $2N$ ด้วย N และปรับแต่งสมการ (5) แล้วนำไปแทนค่าในสมการ (4) เขาสามารถคำนวณขอบเขตบนของพลังงานสถานะพื้นของระบบได้ดังสมการด้านล่าง

$$E_{\text{Dyson}} < - \left(\frac{me^4}{2\hbar^2} \right) \frac{N^{7/5}}{1944\pi^2} \quad (6)$$

เนื่องจากระบบนี้เป็นระบบก่อกวนสสาร ดังนั้นถือว่า N มีค่ามาก (อยู่ในชั้น 10^{23} อนุภาค) จะเห็นว่าขอบเขตบนของพลังงานสถานะพื้นมีค่าขึ้นกับ $N^{7/5}$ แสดงให้เห็นถึงการไร้เสถียรภาพของระบบ ทำให้สรุปได้ว่าสปีนมีความจำเป็นต่อการมีเสถียรภาพของสสารเป็นอย่างยิ่ง

ต่อมานานูเกียนและมูทาพอร์ (Manoukian and Muthaporn, 2002) ได้ปรับปรุงค่าขอบเขตบนของไดสันให้ดีขึ้นกว่าเดิม 31 เท่า โดยใช้เทคนิควิธีการทางฟังก์ชันของชวิงเงอร์ (Schwinger functional technique) (Schwinger, 1951a, 1951b, 1953, 1954, 1988) เพื่อคำนวณค่าคาดหวังของแฮมิลโทเนียน (expectation value of Hamiltonian) โดยขอบเขตที่แม่นยำของสัมประสิทธิ์ไดสันคือ $\frac{1}{3} \leq \beta_N \leq \frac{1}{2}$, $N \geq 2$, $k < 2N$ (Manoukian and Muthaporn, 2002) เมื่อเราแทนค่า β_N ในสมการ (5) เราได้

$$H_{2N} < \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^k T_{\alpha} + \left(2N - \frac{k}{3} \right) T_0 + \frac{1}{3} \left[2N - (k-2) \frac{1}{2} \right] \left(- \sum_{\alpha=1}^k I_{0\alpha} \right) \quad (7)$$

เมื่อเราแทน $2N$ ด้วย N เราได้ขอบเขตบนของพลังงานสถานะพื้นของระบบที่ประกอบด้วยอนุภาคประจุบวก N อนุภาคและอนุภาคประจุลบ N อนุภาคดังสมการด้านล่าง

$$E_{N,N} < \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^k T_{\alpha} + \left(N - \frac{k}{3}\right) T_0 + \frac{1}{3} \left[N - (k-2) \frac{1}{2} \right] \left(- \sum_{\alpha=1}^k I_{0\alpha} \right) \quad (8)$$

เมื่อ $k < N$ และสัมประสิทธิ์ของ $\left(- \sum_{\alpha=1}^k I_{0\alpha} \right)$ ในสมการด้านบนต้องมีค่าเป็นบวกเสมอ โดย

$$T_{\alpha} = \int d^3 \vec{x} \psi_{\alpha}^* (\vec{x}) \left(- \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \right) \psi_{\alpha} (\vec{x}), \quad \alpha = 0, 1, \dots, k, \quad (9)$$

$$I_{0\alpha} = \int d^3 \vec{x} d^3 \vec{x}' \psi_0^* (\vec{x}) \psi_{\alpha}^* (\vec{x}) \frac{e^2}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \psi_0 (\vec{x}') \psi_{\alpha} (\vec{x}'), \quad \alpha = 1, \dots, k \quad (10)$$

เพื่อหาค่าทางด้านขวามือของสมการด้านบน สถานะของอนุภาคถูกกำหนดด้วยเลขจำนวนเต็มบวก 3 ตัวคือ (n_1, n_2, n_3) ซึ่งเปรียบเสมือนตำแหน่งของปลายลูกศรของเวกเตอร์ $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ การกำหนดสถานะที่แตกต่างกันกำหนดโดยการสลับตำแหน่งของตัวเลขทั้งสาม เช่น สถานะ $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 1)$ และ $(2, 1, 1)$ เป็นสถานะที่แตกต่างกันที่มีเงื่อนไขบังคับคือ $n^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 6$ เป็นต้น ดังนั้นจำนวนสถานะ k ทั้งหมดของระบบสำหรับเงื่อนไขบังคับ n^2 ใดๆ จะเป็นการนับสถานะที่เป็นไปได้ทั้งหมดของเวกเตอร์ \vec{n}' ที่มี n'^2 น้อยกว่าหรือเท่ากับ n^2 ไม่นับสถานะ $(1, 1, 1)$ เนื่องจาก $n'_1, n'_2, n'_3 = 1, 2, \dots$ ดังนั้น k คือจำนวนสถานะที่ระบุด้วยปลายลูกศรที่ขี้อยู่ภายในหรืออยู่บนผิวของ $\frac{1}{8}$ ของทรงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ n^2 นั่นเอง ยกตัวอย่างเช่น ถ้ากำหนด $n^2 = 6$ เราได้สถานะทั้งหมดคือ $(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)$ นั่นคือ $k = 3$ ถ้า $n^2 = 9$ เราได้สถานะทั้งหมดคือ $(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 1), (2, 2, 1)$ ดังนั้น $k = 6$ ฟังก์ชันสถานะที่ใช้ในการคำนวณขอบเขตบนเป็นฟังก์ชันที่อยู่ในรูป Sine (Dyson, 1967) ดังแสดงในสมการด้านล่าง

$$\psi_{\vec{n}} (\vec{x}) = \left(\frac{2}{L} \right)^{\frac{2}{3}} \prod_{i=1}^3 \sin \left(\frac{n_i \pi x_i}{L} \right) \quad (11)$$

สำหรับ $0 < x_i < L$ และให้ $\psi_{\vec{n}} = 0$ ถ้า x_i มีค่านอกเหนือจากช่วงที่กำหนด ตัวเลขแสดงลำดับของแต่ละสถานะกำหนดด้วย α โดย $\alpha = 0$ สำหรับสถานะ $\vec{n}_0 = (1, 1, 1)$ $\alpha = 1, 2, 3$ สำหรับสถานะ $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$ ตามลำดับ และทำการนับลักษณะนี้ไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะได้จำนวนสถานะทั้งหมด k โดยอาศัยวิธีการดังกล่าวพร้อมทั้งการปรับแต่งค่าคาดหวังที่ขึ้นกับ L เราสามารถคำนวณหาขอบเขตบนของพลังงานสถานะพื้นของระบบสสารประเภทโบซอนในกรณีคือ

$$E_{N,N} < - \left(\frac{me^4}{2\hbar^2} \right) \frac{N^{7/5}}{62\pi^4} \quad (12)$$

เมื่อเปรียบเทียบกับผลการคำนวณของไดสันในสมการ (6) จะเห็นว่าขอบเขตบนที่คำนวณได้ในสมการที่ (12) ได้รับการปรับปรุงให้มีค่าเข้าใกล้พลังงานสถานะพื้นจริง ๆ ของระบบดีกว่าค่าขอบเขตบนของไดสันอยู่ 31 เท่า และตัวเลขชี้กำลังของ N แสดงให้เห็นอย่างชัดเจนว่าสปีนมีความจำเป็นต่อเสถียรภาพของสสาร ระบบสสารที่เราคำนวณในหัวข้อนี้เป็นระบบที่ถือว่ามิวนิวเคลียสที่เคลื่อนที่ได้ อนุภาคโบซอนทุกอนุภาคสามารถมีพลังงานจลน์ และเราถือว่าทุก ๆ อนุภาคมีมวลที่หาค่าได้ โดย m เป็นมวลที่น้อยที่สุดในระบบ สำหรับในกรณีที่นิวเคลียสถูกต้อง (fixed nucleus) เราสามารถพิสูจน์ได้ว่าขอบเขตบนของพลังงานสถานะพื้นมีค่าขึ้นกับ $N^{5/3}$ โดยมีรายละเอียดในหัวข้อถัดไป

กรณีระบบก้อนสสารประเภทโบซอนที่นิวเคลียสที่ถูกต้อง

สำหรับในกรณีที่นิวเคลียสถูกต้องนั้นเราสามารถพิสูจน์ได้ว่าขอบเขตบนของพลังงานสถานะพื้นของระบบสสารประเภทโบซอนมีค่าขึ้นกับ $N^{5/3}$ (Lieb, 1979) โดยถือว่าอนุภาคประจุบวกมีมวลได้ไม่จำกัด และเลขอะตอม z มีค่ามากกว่า 0 โดยเพื่อให้ฮามิลโทเนียนของระบบมีความเรียบง่าย ลีบได้กำหนดให้มวลของอนุภาคประจุลบทั้งหมดเท่ากับ $1/2$ มีประจุ -1 และให้ $\hbar^2 = 1$ ดังนั้นพลังงาน 1 Rydberg เท่ากับ $1/4$ ระบบที่พิจารณาประกอบด้วยนิวเคลียส K นิวเคลียส แต่ละนิวเคลียสมิมีมวลไม่จำกัดและมีประจุ $z > 0$ โดยที่ $K = 8n^3$ เมื่อ n เป็นเลขจำนวนเต็มบวก ระบบมีความเป็นกลางทางไฟฟ้า ดังนั้น $N = Kz$ เมื่อ N เป็นจำนวนของอนุภาคประจุลบในระบบ จะเห็นว่าระบบที่ลืบศึกษานั้นมีจำนวนนิวเคลียสเป็นค่าเฉพาะบางค่าคือ $K = 8, 64, 216, \dots$ และในกรณี $z = 1$ เราได้ $N = 8, 64, 216, \dots$ ฮามิลโทเนียนสำหรับอนุภาคประจุลบของระบบนี้สามารถเขียนได้เป็น

$$H_{N,R} = -\sum_{i=1}^N \left\{ \nabla_i^2 + z \sum_{j=1}^K |\vec{x}_i - \vec{R}_j|^{-1} \right\} + \sum_{i < j \leq N} |\vec{x}_i - \vec{x}_j|^{-1} + z^2 \sum_{i < j \leq K} |\vec{R}_i - \vec{R}_j|^{-1} \quad (13)$$

เมื่อ $\vec{R} = \{\vec{R}_1, \dots, \vec{R}_K\}$ เป็นตำแหน่งของที่ตรึงของอนุภาคประจุบวก ฟังก์ชันคลื่นของระบบกำหนดให้เป็น

$$\Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = \prod_{i=1}^N \phi_\lambda(\vec{x}_i) \quad (14)$$

เมื่อ $\phi_\lambda(\vec{x}) = \lambda^{3/2} g(\lambda\vec{x})$ และ $g(\vec{x})$ เป็นฟังก์ชันปกติ (normalized) โดยอยู่ในรูปดังแสดงในสมการด้านล่าง

$$g(\vec{x}) = f(x_1) f(x_2) f(x_3), \quad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \quad (15)$$

โดยกำหนดให้

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{3/2} [1 - |x|], & |x| &\leq 1 \\ &= 0, & |x| &> 1 \end{aligned} \quad (16)$$

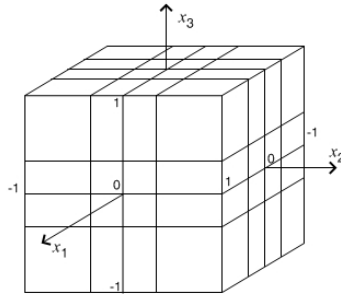
โดยใช้เงื่อนไขความเป็นปกติและความไม่ขึ้นต่อกัน (orthonormal) ของฟังก์ชันและการคำนวณที่ผิดพลาด ขอบเขตบนของค่าคาดหวังของฮามิลโทเนียนสามารถเขียนได้ดังสมการด้านล่าง

$$\langle \Psi | H_{N,R} | \Psi \rangle \leq \lambda^2 NT + \lambda W(N, R) \quad (17)$$

เมื่อ $T = \int |\vec{\nabla} g(\vec{x})|^2 d^3\vec{x} = 9$ และ

$$W(N, \vec{R}) = \frac{1}{2} N^2 \iint g^2(\vec{x}) g^2(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3\vec{x} d^3\vec{x}' - Nz \int g^2(\vec{x}) \sum_{j=1}^K \frac{1}{|\vec{x} - \vec{R}_j|} d^3\vec{x} + z^2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{1}{|\vec{R}_i - \vec{R}_j|} \quad (18)$$

สิ่งที่เป็นหัวใจของงานวิจัยนี้คือ ลีบสามารถหาขอบเขตบนของสมการด้านบนได้โดยใช้วิธีที่ชาญฉลาดเป็นอย่างยิ่ง และวิธีการนี้ได้ถูกนำมาใช้อีกครั้งโดยมานูกิเยนและมูทาพอร์ (Manoukian and Muthaporn, 2003) ในการศึกษาาระบบก้อนสสารที่มี $N \geq 8$ ใน 3 มิติ และ ในมิติ ν ใดๆ (Muthaporn and Manoukian, 2004)



รูปที่ 1 ก่อ่งใหญ่ถูกแบ่งออกเป็นก่่งเล็ก ๆ ทั้งหมด K ก่่ง รูปนี้เป็นการแบ่งก่่งในกรณี $n = 2$ โดยที่ $K = 8n^3 = 64$ ก่่ง

การพิสูจน์หาขอบเขตบนของค่าในสมการที่ (18) นั้น ลีบได้แบ่งช่วงระยะทางจาก 0–1 ออกเป็นทั้งหมด n ช่วง โดยให้ $0 = a(0) < a(1) < \dots < a(n) = 1$ และนิยามให้ช่วงที่ j มีความยาว $L(j) = [a(j), a(j+1)]$ สำหรับ $0 \leq j \leq n-1$ และให้ $L(j) = [-a(-j), -a(-j-1)]$ สำหรับ $-n \leq j \leq -1$ รูปที่ 1 เป็นตัวอย่างการแบ่งก่่งในกรณี $n = 2$ ซึ่งเราสามารถแบ่งได้ 64 ก่่ง กำหนดให้นิวเคลียส 1 นิวเคลียสอยู่ภายในก่่งสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\Gamma(i, j, k) = L(i) \times L(j) \times L(k)$ เมื่อ $-n \leq i, j, k \leq n$ เป็นไปตามเงื่อนไขคือ

$$\int_{\Gamma(i,j,k)} g^2(\vec{x}) d^3\vec{x} = \frac{1}{K} \quad (19)$$

จากนั้นสืบใช้วิธีหาค่าเฉลี่ยแบบถ่วงน้ำหนักของ $W(N, \vec{R})$ รอบตำแหน่ง \vec{R}_i ของแต่ละนิวเคลียส โดยมีน้ำหนักสัมพัทธ์คือ $g^2(\vec{R}_1) \cdots g^3(\vec{R}_K)$ ทำให้ได้ค่าเฉลี่ยแบบถ่วงน้ำหนักของ $W(N, \vec{R})$ มีค่าเป็น

$$W(N) = -\frac{1}{2} N^2 \sum_{(i,j,k)} \iint_{\Gamma(i,j,k)} d^2\vec{x} d^3\vec{x}' g^2(\vec{x}) \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} g^2(\vec{x}') \quad (20)$$

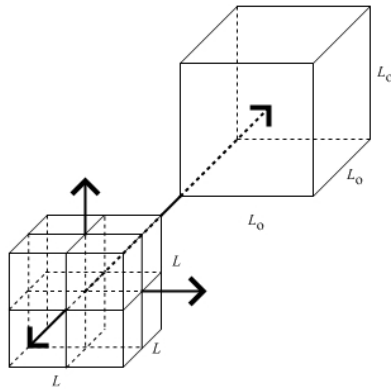
เนื่องจากฟังก์ชันน้ำหนักที่นำมาถ่วงมีค่าเป็นบวก และเราต้องการหาขอบเขตบนของ $W(N, \vec{R})$ ดังนั้นมีความเป็นไปได้แน่นอนว่าต้องมีบางเซตของ $\vec{R} = \{\vec{R}_1, \dots, \vec{R}_K\}$ ที่ทำให้ค่า $W(N, \vec{R}) \leq W(N)$ จะเห็นว่าอินทิเกรตสองชั้นในสมการ (20) เป็นรูปแบบการอินทิเกรตเพื่อหาพลังงานศักย์ไฟฟ้าของประจุ $1/K$ ที่ถูกกักอยู่ภายในกล่อง $\Gamma(i, j, k)$ และเป็นที่ทราบกันดีว่าพลังงานศักย์ไฟฟ้าของประจุที่อยู่ภายในกล่องมีค่ามากกว่าพลังงานศักย์ไฟฟ้าของประจุที่กระจายบนผิวทรงกลมที่คลุมกล่องนั้นพอดี โดยใช้วิธี convexity สืบสามารถคำนวณหาขอบเขตล่างของพลังงานศักย์ไฟฟ้ามีค่าขึ้นกับรัศมีเฉลี่ยของทรงกลม $(3/n)^{1/2}$ และเมื่อคุณลบเข้าไปเราสามารถหาขอบเขตบนของค่าเฉลี่ย $W(N)$ ได้ดังนี้

$$W(N) \leq -z^2 K \frac{n}{\sqrt{3}} = -\frac{z^2 K^{4/3}}{\sqrt{12}} \quad (21)$$

เมื่อแทนค่าขอบเขตบนของ $W(N)$ ในสมการ (17) และหลังจากทำการปรับแต่งเทียบกับ λ สิ่งที่ได้คือขอบเขตบนของพลังงานสถานะพื้นมีค่าเท่ากับ

$$E_0 \leq -CN^{5/3}, \quad C \geq \frac{1}{108} z^{4/3} Ry \quad (22)$$

จะเห็นว่าระบบสสารที่สืบศึกษาในงานวิจัยชิ้นนี้มีจำนวนนิวเคลียส $K = 8n^3$ และทุกนิวเคลียสมีเลขอะตอม z เท่ากัน โดยที่ $z > 0$ โดยที่จำนวนอนุภาคประจุลบ $N = Kz$ ในกรณีนี้ n มีค่ามากๆ ช่องว่างของจำนวนนิวเคลียสในแต่ละ n ยังมีค่าแตกต่างกันมาก เพื่อเติมเต็มช่องว่างตรงนี้จึงมีงานวิจัยที่ปรับปรุงงานของสืบโดยมานูเกียนและมูทพอร์น (Manoukian and Muthaporn, 2003) สำหรับกรณีที่ $N = 8, 9, 10, \dots$ โดยกำหนดให้แต่ละนิวเคลียสของระบบสสารประเภทโบซอนมีเลขอะตอม $z = 1$ ระบบที่พิจารณาเป็นระบบก่อนสสารโบซอนที่เป็นกลางทางไฟฟ้า มี N นิวเคลียส และอนุภาคประจุลบ N อนุภาค กำหนดให้นิวเคลียส K ก้อนแรกอยู่ในกล่องลูกบาศก์แต่ละด้านยาว L โดย $K = 8n^3$ เมื่อ $n = 1, 2, \dots$ และภายในกล่องนี้มีอนุภาคประจุลบ K อนุภาคอาศัยอยู่ด้วย ส่วนนิวเคลียสที่เหลืออีก $N - K$ นิวเคลียสและอนุภาคประจุลบที่เหลืออีก $N - K$ อนุภาค จะถูกกำหนดให้อยู่ภายในกล่องที่แต่ละด้านยาว L_0 จำนวน $N - K$ กล่อง ให้แต่ละกล่องมีนิวเคลียส 1 นิวเคลียสและมีอนุภาคประจุลบ 1 อนุภาค ดังรูปที่ 2 เป็นตัวอย่างในกรณี $n = 1$ และ $N = 9$



รูปที่ 2 แสดงตัวอย่างการแบ่งกล่องในกรณี $n = 1, N = 9$ กล่อง $L \times L \times L$ ถูกแบ่งออกเป็น $K = 8n^3 = 8$ กล่อง และกล่องที่เหลืออีก $N - K = 1$ กล่องมีขนาด $L_0 \times L_0 \times L_0$ โดยที่ $L_0 \geq L$

ฮามิลโทเนียนของระบบที่กล่าวมาเขียนได้ดังนี้

$$H_{N,R} = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \frac{e^2}{|\vec{x}_i - \vec{R}_j|} + \sum_{i < j}^N \frac{e^2}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} + \sum_{i < j}^N \frac{e^2}{|\vec{R}_i - \vec{R}_j|} \tag{23}$$

เมื่อ \vec{x}_i แทนตำแหน่งของอนุภาคประจุลบ \vec{R}_i แทนตำแหน่งของอนุภาคประจุบวก m_i คือมวลของแต่ละอนุภาคประจุลบ ซึ่งเราจะแทนค่ามวลนี้ด้วยมวลของประจุลบที่น้อยที่สุดคือ m เราได้เงื่อนไขของจำนวนอนุภาคคือ

$$N = K \left(1 + \frac{\epsilon}{n} \right)^3 \tag{24}$$

เมื่อ $0 \leq \epsilon < 1$ ฟังก์ชันคลื่นที่พิจารณาประกอบด้วยฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคประจุลบที่อยู่ในกล่องแต่ละด้านยาว L ทั้งหมด K อนุภาค และฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคประจุลบที่อยู่ในกล่องยาว L_0 อีก $N - K$ กล่อง โดยอาศัยคุณสมบัติความเป็นปกติและไม่ขึ้นต่อกันของฟังก์ชันคลื่นและการใช้วิธีการแบ่งกล่องแบบเดียวกันกับที่ลืบใช้ เราสามารถหาขอบเขตบนของค่าคาดหวังของพลังงานรวมของระบบได้เป็น

$$\langle \Psi | H_{N,R} | \Psi \rangle \leq \frac{\pi^2 \hbar^2 K}{4mL^2} - \frac{e^2 K^{3/2}}{8L} + (N - K) \left[\frac{\pi^2 \hbar^2}{4mL_0^2} + \frac{e^2 (N + K - 1)}{\chi L_0} - \frac{e^2}{\sqrt{2}L_0} \right] \tag{25}$$

เมื่อ $\chi \geq 8$ และ $L_0 \geq L$ โดยเทอม $-\frac{e^2 K^{3/2}}{8L}$ ค่าเฉลี่ยของพลังงาน $W(N)$ ของอนุภาคที่อยู่ในกล่องยาว L และได้มาจากวิธีการเดียวกันกับของลืบ สิ่งที่แตกต่างกันของเทอมนี้คือฟังก์ชันคลื่นของลืบจะอยู่ในกล่อง $1 \times 1 \times 1$ และมี λ เป็นตัวแปรสำหรับเพื่อหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุด ส่วนในงานวิจัยของมานูเกียนและมูทาพรัตน์ ฟังก์ชันคลื่นของ K อนุภาคจะอยู่ในกล่องแต่ละด้านยาว L โดยให้ตัวแปรตัวนี้เป็นตัวแปรที่ใช้ปรับแต่งหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุด และสิ่งที่แตกต่างอีกประการหนึ่งคือค่าขอบเขตบนของลืบได้จากวิธี convexity ส่วนของมานูเกียนและมูทาพรัตน์ได้จากอสมการของโคชี-ชวาร์ตซ์ (Cauchy-Schwarz inequality) ซึ่งเขียนดังต่อไปนี้

$$\left(\sum_{i=1}^N a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^N a_i^2 \sum_{i=1}^N b_i^2 \quad (26)$$

จากนั้นทำการหาค่า L และ L_0 แล้วแทนค่าในสมการ (25) ทำให้ขอบเขตบนของพลังงานสถานะพื้นมีค่าตามสมการด้านล่าง

$$E_{N,N} < - \left(\frac{me^4}{2\hbar^2} \right) \frac{N^{5/3}}{10\pi^2} \quad (27)$$

สำหรับ $N \geq 10^6$ จะเห็นว่าขอบเขตบนที่ได้มีค่าขึ้นกับ $N^{5/3}$ แสดงให้เห็นความไม่มีเสถียรภาพของก้อนสสารประเภทโบซอน และระบบที่พิจารณาเป็นระบบที่มีอนุภาคประจุลบ $N = 8, 9, 10, \dots$ ดังนั้นจำนวนอนุภาคในระบบของมาฆูเกียนและนุทาพรจึงมีค่าใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากกว่าในกรณีของลิบ เพื่อให้เห็นภาพที่ชัดเจนว่าพลังงานที่ปลดปล่อยออกมาจากการรวมสสารสองหลอดทดลองเข้าด้วยกันมีค่ามากขนาดไหน เราให้แต่ละหลอดมีจำนวนอนุภาค 10^{23} อนุภาคโดยคิดเฉพาะที่ขอบเขตบนของพลังงานสถานะพื้นที่เราคำนวณได้

$$\text{พลังงานที่ปลดปล่อยออกมามีค่าเท่ากับ } \left(\frac{me^4}{2\hbar^2} \right) \frac{1}{10\pi^2} \left[(2 \times 10^{23})^{5/3} - 2(10)^{5/3} \right] = 1.33 \times 10^6$$

kilotons of TNT ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบกับพลังงานของระเบิดปรมาณูลิตเทิลบอย (Little Boy atomic bomb) ที่ทิ้งที่เมืองฮิโรชิมาในวันที่ 6 สิงหาคม พ.ศ. 2488 โดยพลังงานที่ปลดปล่อยออกมาของลิตเทิลบอยเท่ากับ 15 kilotons of TNT จะเห็นว่าพลังงานของการรวมสสารจากหลอดทดลองมีค่ามากมายมหาศาลยิ่งกว่าพลังงานจากระเบิดปรมาณู ดังนั้นเราคงไม่อยากให้มีสสารประเภทนี้อยู่ใกล้ ๆ ตัวเรา และเราก็คงคิดเป็นอย่างยิ่งที่ตอนนี้เรายังไม่เจอสสารประเภทนี้เลยในชีวิตจริงของเรา

สรุปและวิจารณ์

ทฤษฎีบทสปีนเชิงสถิติซึ่งกล่าวไว้ว่า “อนุภาคสองตัวที่เหมือนกันทุกประการที่มีสปีนครึ่งจำนวนเต็ม จะไม่สามารถครอบครองสถานะทางควอนตัมเดียวกันได้ ส่วนอนุภาคที่เหมือนกันทุกประการที่มีสปีนเป็นเลขจำนวนเต็มสามารถครอบครองสถานะทางควอนตัมเดียวกันได้ไม่จำกัดจำนวน” นั้น มีความสำคัญต่อเสถียรภาพของสสารเป็นอย่างยิ่ง การนำก้อนสสารสองก้อนที่ไม่มีสปีนมารวมกันจะทำให้เกิดการปลดปล่อยพลังงานมหาศาลระดับระเบิดปรมาณู เราจึงไม่สามารถพบเห็นสสารประเภทดังกล่าวรอบ ๆ ตัวของเรา ถือเป็นความโชคดีที่ธรรมชาติได้สร้างให้อนุภาคที่ประกอบกันเป็นสสารหลังการกำเนิดเอกภพให้เป็นอนุภาคที่มีสปีนเป็นจำนวนเต็มครึ่ง จึงทำให้มีเอกภพที่เราอาศัยอยู่ปรากฏดังเช่นที่เห็นทุกวันนี้และทำให้เราดำรงอยู่ ณ ปัจจุบันนี้ การพิสูจน์ถึงความจำเป็นของสปีนต่อการมีเสถียรภาพของสสารจึงเป็นหัวข้อวิจัยที่สำคัญมากหัวข้อหนึ่งในวงการฟิสิกส์ทฤษฎี (Manoukian, 2006) ในบทความนี้ได้กล่าวถึงงานวิจัยที่ศึกษาระบบก้อนสสารที่มีจำนวนอนุภาคอยู่ในขั้นของเลขอาโวกาโดรและมีอันตรกิริยาแบบคูลอมบ์ แต่ยังมีงานวิจัยอื่น ๆ อีกหลายงานที่ทำการศึกษาระบบขนาดใหญ่ขนาดดวงดาว ซึ่ง

แน่นอนว่าจำนวนอนุภาคในระบบนี้มีมากมายมหาศาล โดยในกรณีนี้อันตรกิริยาแบบโน้มถ่วงและทฤษฎีสัมพัทธภาพจะเข้ามามีบทบาทสำคัญพร้อม ๆ กับอันตรกิริยาแบบคูลอมบ์ ในบทความต่อไปผู้เขียนคาดว่าจะได้กล่าวถึงงานวิจัยในสาขานี้ได้ครอบคลุมมากยิ่งขึ้น

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบพระคุณศาสตราจารย์เอ็ดวาร์ด เบิร์ก มานูเกียน (Prof. Edouard B. Manoukian) จาก The Institute for Fundamental Study, Naresuan University และผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่านที่ช่วยให้คำแนะนำและแก้ไขบทความให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

เอกสารอ้างอิง

- Bardeen, J., Cooper, L.N. and Schrieffer, J. R. (1957). Theory of Superconductivity. *Physical Review* 108: 1175-1204.
- Bogoliubov, N.N. (1947). On the Theory of Superfluidity. *Journal of Physics (USSR)* 11: 23-32.
- Brown, L. and Schwinger, J. (1961). Spin and statistics. *Progress of Theoretical Physics* 26: 917-926.
- Burgoyne, N. (1958). On the connection of spin and statistics. *Nuovo Cimento* 8: 607-609.
- Cooper, L.N. (1956). Bound Electron Pairs in a Degenerate Fermi Gas. *Physical Review* 104: 1189-1190.; Schafroth, M. R. (1954). *ibid.* 96: 1442.
- de Wet, J. S. (1940). On the connection between the spin and statistics of elementary particles. *Physical Review* 57(7): 646-652.
- Dyson, F. J. (1967). Ground-State energy of a finite system of charged particles. *Journal of Mathematical Physics* 8(8): 1538-1545.
- Dyson, F. J. and Lenard, A. (1967). Stability of matter. I. *Journal of Mathematical Physics* 8(3): 423-434.
- Ehrenfest, P. (1959). Ansprache zur Verleihung der Lorentzmedaille an Professor Wolfgang Pauli am 31 Oktober 1931. (Address on award of Lorentz medal to Professor Wolfgang Pauli on 31 October 1931). In M. J. Klein (ed.). Ehrenfest, P. Collected scientific papers. Amsterdam: North-Holland. [The address appeared originally in P. Ehrenfest. *Versl. Akad. Amsterdam* 40: 121-126.].
- Fierz, M. (1939). Über die relativistische Theorie kräftefreier Teilchen mit beliebigem Spin. (On the relativistic theory of non-interacting particles of arbitrary spin). *Helvetica Physica Acta* 12: 3-37.
- Fisher, M. E. and Ruelle. D. (1966). The Stability of Many-Particle Systems. *Journal of Mathematical Physics* 7: 260-270.
- Iwanenko, D. and Sokolow, A. (1937). Note on the second quantization of the Dirac equation. *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion* 11: 590.
- Jost, R. (1960). Das Pauli-prinzip und die Lorentz-gruppe. In M. Fierz and V. F. Weisskopf (eds.). *Theoretical physics in the twentieth century; a memorial volume to Wolfgang Pauli* (pp. 107-136). New York: Interscience.
- Lieb, E. H. (1979). The $N^{5/3}$ law for bosons. *Physics Letters A* 70: 71-73.

- Lieb, E.H. (1991). *The Stability of Matter: From Atoms to Stars*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.
- Lüders, G. and Zumino, B. (1958). Connection between spin and statistics. *Physical Review* 110(6): 1450–1453.
- Manoukian, E. B. (2006). *Quantum Theory, A Wide Spectrum*. Dordrecht: Springer-Verlag. pp. 765–798.
- Manoukian, E. B. and Muthaporn, C. (2002). The collapse of “bosonic matter”. *Progress of Theoretical Physics* 107(5): 927–939.
- Manoukian, E. B. and Muthaporn, C. (2003). $N^{5/3}$ Law for bosons for arbitrary large N . *Progress of Theoretical Physics* 110(2): 385–391.
- Manoukian, E. B. and Sirininlakul, S. (2005). High-density limit and inflation of matter. *Physical Review. Letters*. 95: 190402-190404.
- Muthaporn, C. and Manoukian, E. B. (2004). Instability of “bosonic matter” in all dimensions. *Physics Letters A* 321(3): 152–154.
- Pauli, W. (1925). Über den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren. (On the Connexion between the Completion of Electron Groups in an Atom with the Complex Structure of Spectra). *Zeitschrift für Physik* 31: 765–783.
- Pauli, W. (1940). The connection between spin and statistics. *Physical Review*. 58: 716–722.
- Pauli, W. (1950). On the connection between spin and statistics. *Progress of Theoretical Physics* 5: 526–543.
- Pauli, W. and Belinfante, F. J. (1940). On the statistical behaviour of known and unknown elementary particles. *Physica* 7(3): 177–192.
- Pauli, W. and Weisskopf, V. F. (1934). The quantization of the scalar relativistic wave equation, *Helvetica Physica Acta* 7: 709–731. Reprinted in English translation in Miller (1994): 188–205.
- Schwinger, J. (1951a). On the Green’s functions of quantized fields I. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 37(7): 452–455.
- Schwinger, J. (1951b). The theory of quantized fields I. *Physical Review* 82(6): 914–927.
- Schwinger, J. (1953). The theory of quantized fields II. *Physical Review* 91(3): 713–728.
- Schwinger, J. (1954). The theory of quantized fields V. *Physical Review* 93(3): 615–628.
- Schwinger, J. (1958a). Spin, statistics, and the TCP theorem. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 44(2): 223–228.
- Schwinger, J. (1958b). Addendum to spin, statistics and the TCP theorem. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 44(6): 617–619.
- Schwinger, J. (1988). *Particles, sources and fields* (Vols. 1–3). Redwood City, California: Addison-Wesley.
- Stoner, E. C. (1924). The distribution of electrons among atomic levels. *Philosophical Magazine* 48(286): 719–736.
- Tomonaga, S-I. (1997). *The story of spin*. Translated by T. Oka. Chicago: University of Chicago Press.
- Wightman, A. S. (1956). Quantum field theory in terms of vacuum expectation values. *Physical Review* 101(2): 860–866.
- Wikipedia. the Free Encyclopedia. (2012). TNT equivalent. แหล่งข้อมูล: http://en.wikipedia.org/wiki/TNT_equivalent. ค้นเมื่อวันที่ 14 กุมภาพันธ์ 2555.

