



ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์กับลมหายใจมนุษย์

Sine and Cosine Functions on Human Breath

สุพัชระ คงนวน¹

บทคัดย่อ

บทความชิ้นนี้ มีจุดประสงค์เพื่อแสดงบทบาทสำคัญของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ต่อการจำลองการไหลของลมหายใจมนุษย์ บทบาทเหล่านั้นถูกแสดงให้เห็นโดยผ่านขั้นตอนการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และวิธีการหาผลเฉลยของแบบจำลองในรูปแบบเชิงวิเคราะห์ โดยประสิทธิภาพของแบบจำลองและผลเฉลยที่ได้จากการอาศัยฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ถูกวิเคราะห์โดยการนำไปเปรียบเทียบกับความสมจริงของการไหลของลมหายใจและกับผลเฉลยเชิงตัวเลขที่มีประสิทธิภาพ

ABSTRACT

This article aims to show the important roles of sine and cosine functions on simulation of the airflow in human breath. The important roles are shown by a mathematical modelling construction and a method of analytical solution. The effective of the constructed mathematical modelling and the obtained solution is investigated by the comparison with the fact of human airflow and the results obtained by an efficient numerical method.

คำสำคัญ: ลมหายใจมนุษย์ สมการนาเวียร์-สโตกส์ ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ อนุกรมฟูรีเยร์ แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

Keywords: Airflow in a human airway, Navier-Stokes equations, Analytical solution, Fourier series, mathematical modelling, Sine and cosine function

¹ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ถนนพหลโยธิน ต.คลองหนึ่ง อ.คลองหลวง จ.ปทุมธานี 12121

E-mail: suputchara@mathstat.sci.tu.ac.th, suputchara@yahoo.com

บทนำ

เรามีความคุ้นเคยกับการหายใจเข้าออก แต่อาจลืมไปว่าเรามีลมหายใจอยู่กับตัวอยู่ทุกขณะเวลา และสิ่งที่จะตระหนักว่าลมหายใจนั้นเป็นสมบัติอันล้ำค่ากว่าสมบัติใด ๆ ที่มนุษย์คนหนึ่งจะมี การที่เราหายใจเข้า-ออก หมุนเวียนเปลี่ยนไปเป็นวัฏจักร ในทางพุทธศาสนาสอนให้เราควรตระหนักในหลักไตรลักษณ์ว่า ทุกสิ่งทุกอย่างย่อมมีการเปลี่ยนแปลงเป็นธรรมดา ไม่มีสิ่งใดคงทนถาวรอยู่ในสภาพเดิมได้ตลอดเวลา และไม่สามารถเป็นไปตามบังคับบัญชาของสิ่งใดได้

ในทางวิชาการแพทย์อธิบายได้ว่า พฤติกรรมการหายใจเข้า-ออกของมนุษย์ เกิดจากการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรและความดันของอากาศภายในเมื่อมีการบีบรัดและคลายตัวของปอด ขณะที่ปอดคลายตัวพื้นที่ภายในปอดเพิ่มขึ้นทำให้ความดันอากาศภายในปอด (intrapulmonary pressure) และความดันอากาศในช่องเยื่อหุ้มปอด (intrapleural pressure) ลดต่ำกว่าความดันอากาศภายนอก (atmospheric pressure) (ธวัช, 2552) ส่งผลให้การเคลื่อนที่ของอากาศในทางเดินหายใจมีทิศพุ่งเข้าทางปากผ่านทางเดินหายใจไปยังปอด ทำให้เกิดการหายใจเข้า และเมื่อถึงจุด ๆ หนึ่งปอดจะขยายตัวเต็มที่ แล้วค่อย ๆ บีบตัวลง ทำให้ปริมาตรภายในปอดลดลง ส่งผลต่อความดันของอากาศภายในปอดและบริเวณรอบ ๆ มีค่าสูงขึ้นกว่าความดันอากาศบริเวณภายนอก ความเร็วของอากาศจึงค่อย ๆ เปลี่ยนทิศทางเป็นไหลออกจากปอดผ่านทางเดินหายใจออกสู่ภายนอก ทำให้เกิดการหายใจออก หมุนวนเป็นวัฏจักรเช่นนี้เรื่อยไป

แต่จะมีใครเคยคิดบ้างไหมว่า ฟังก์ชันไซน์ (sine) และโคไซน์ (cosine) ในทางคณิตศาสตร์กับลมหายใจของคนเรานั้นเกี่ยวข้องกัน หรือถ้าหากคิด ก็มันใจว่าคงจะคิดแค่ว่า ฟังก์ชันทั้งสองและลมหายใจนั้นเกี่ยวข้องกันแค่นั้นเองที่มีการหมุนวนเปลี่ยนไปเป็นวัฏจักรเหมือนกันเท่านั้น บทความชิ้นนี้จะชี้ให้เห็นว่า ฟังก์ชันทั้งสองจะมีประโยชน์และเกี่ยวข้องกับลมหายใจมนุษย์มากกว่าที่ใคร ๆ คิดได้อย่างไร

เบื้องต้นเราจะชี้ให้เห็นว่า คณิตศาสตร์และลมหายใจมีความเชื่อมโยงกันได้อย่างไร ความเชื่อมโยงเกิดขึ้นได้ก็เพราะว่า ในทางคณิตศาสตร์ เรามีคณิตศาสตร์ประยุกต์ที่สามารถใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ เพื่ออธิบายหรือแก้ปัญหาของปรากฏการณ์ทางด้านต่าง ๆ รอบตัวเราได้ การหายใจของคนเราก็เช่นกัน เป็นการไหลเข้า-ออกของของไหลชนิดหนึ่ง เราย่อมสามารถที่จะสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์มาอธิบายได้ ดังนั้นในบทความนี้เราจะได้ชี้ให้เห็นความเชื่อมโยงและประโยชน์ของฟังก์ชันทั้งสองที่มีต่อลมหายใจโดยผ่านการสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์และหาผลเฉลยสำหรับการไหลของอากาศในทางเดินหายใจ

ความเกี่ยวข้องกันของฟังก์ชันไซน์หรือโคไซน์และลมหายใจของมนุษย์

ในส่วนนี้เราจะได้แสดงให้เห็นว่า ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์มีประโยชน์และความเกี่ยวข้องกับลมหายใจมนุษย์ โดยผ่านการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการไหลของอากาศในทางเดินหายใจ ในการสร้างแบบจำลองนี้จะประกอบไปด้วยขั้นตอนดังนี้ การกำหนดขอบเขตและการจำลองบริเวณที่จะทำการศึกษา การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ การหาผลเฉลย การจำลองและวิเคราะห์ผล เราจะค่อย ๆ ชี้ให้เห็นว่าฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ เข้ามาเกี่ยวข้องได้อย่างไร

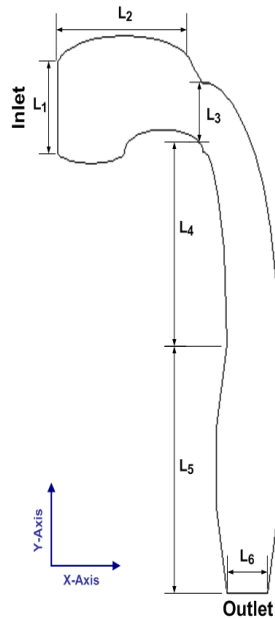
บริเวณที่ใช้ทำการศึกษา

ขอบเขตของบริเวณที่ถูกกำหนดเพื่อใช้ในการศึกษา คือ ตั้งแต่ช่องปากผ่านเข้าสู่หลอดลมไปจนถึงบริเวณก่อนถึงขั้วปอดทั้งสองข้าง (two bronchi) ซึ่งเป็นทางเดินหายใจส่วนบน (upper respiratory tract) เท่านั้น การไหลของอากาศในทางเดินหายใจส่วนบนโดยผ่านช่องปากที่เราจะกล่าวถึงนี้ ถือว่าเป็นการศึกษาในขณะที่ปากกำลังอ้าเปิดกว้าง ท่อทางเดินหายใจในขณะนั้นจึงมีลักษณะเป็นช่องตรงมากพอที่จะทำให้โครงสร้างของบริเวณทางเดินหายใจที่กำลังศึกษามีลักษณะไม่ซับซ้อนมากนัก ดังนั้นการไหลของอากาศนี้ จึงถูกสมมติว่าเป็นการไหลแบบราบเรียบ (laminar flow)

ความซับซ้อนของโครงสร้างทางเดินหายใจของมนุษย์ นับเป็นอุปสรรคสำคัญในการสร้างโดเมนให้สมจริง งานวิจัยส่วนมาก จึงมักใช้ข้อมูลทางการแพทย์ประกอบกับโปรแกรมสำเร็จรูปที่มีประสิทธิภาพสูงมาจำลองรูปทางเดินหายใจขึ้นมาให้ใกล้เคียงกับความเป็นจริงที่สุด ซึ่งในส่วนนี้เราได้ทำการค้นคว้าข้อมูลทางกายภาพของโครงสร้างทางเดินหายใจของมนุษย์ จากงานวิจัยต่าง ๆ (Ball et al., 2008; Fadl et al., 2007; Lee et al., 2008; Luo et al., 2004) เพื่อนำมาใช้ในการศึกษาดังค่าที่แสดงไว้ในตารางที่ 1 และเราสามารถจำลองภาพทางเดินหายใจได้ดังรูปที่ 1

ตารางที่ 1 ค่าพารามิเตอร์สำหรับการจำลองทางเดินหายใจของมนุษย์

พารามิเตอร์	ค่าพารามิเตอร์ (cm)
ความกว้างของทางเข้า (inlet); L_1	3.125
ความลึกของช่องปาก(oral cavity); L_2	7.0
เส้นผ่านศูนย์กลางของหลอดลมตอนต้น; L_3	2.5
ความยาวของหลอดลมช่วงที่ 1; L_4	7.0
ความยาวของหลอดลมช่วงที่ 2; L_5	9.0
ความกว้างของทางออก (outlet); L_6	2.0



รูปที่ 1 รูปจำลองทางเดินหายใจของมนุษย์ในสองมิติที่ถูกใช้ทำการศึกษา (โตเมน)

การสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์สำหรับการไหลของอากาศ

ในที่นี้เราจะพิจารณาการไหลของอากาศในทางเดินหายใจโดยผ่านทางช่องปาก ภายใต้สมมติฐานว่าอากาศในทางเดินหายใจเป็นของไหลที่มีความสม่ำเสมอเป็นเนื้อเดียวกันและอัดไม่ได้ ที่อุณหภูมิหนึ่ง ๆ ความหนืดและความหนาแน่นมีค่าคงตัวตลอดเวลา (homogeneous, Newtonian and incompressible fluid) อากาศในช่องทางเดินหายใจมีการไหลเข้า-ออก ตามการเปลี่ยนแปลงของความดันภายในถุงลมภายในปอด และไม่มีแรงอื่นใดกระทำจากภายนอก จึงได้ว่า การไหลของอากาศเป็นแบบราบเรียบที่แกว่งกวัดตามคาบของเวลา (oscillating flow) จึงสามารถอธิบายการไหลนี้ด้วยสมการการไหลต่อเนื่อง และสมการนาเวียร์-สโตกส์ ที่ขึ้นกับทั้งตำแหน่งและเวลา เพื่อความสะดวกและง่ายแก่การจำลอง เราจึงจำลองปัญหานี้ในสองมิติ ถือเสมือนว่าเรากำลังมองภาพตัดขวางด้านข้างนั่นเอง ตำแหน่งต่าง ๆ ในทางเดินหายใจ จึงแทนด้วยเวกเตอร์ \mathbf{x} ซึ่งเป็นเวกเตอร์จะมีทิศทางในทิศตามแนวนอนเป็น x และแนวตั้งเป็น y ดังนั้นจึงกำหนดให้ $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ แทนความเร็วของอากาศ ที่ตำแหน่งและเวลาใด ๆ เป็นเวกเตอร์ ที่ประกอบด้วยความเร็วในทิศตามแนวนอน x และ แนวตั้ง y คือ u และ v ตามลำดับ แบบจำลองการไหลของอากาศจึงสามารถถูกนำเสนอ (อัญชูลี และคณะ, 2553; Jutharat and Supachara, 2011) ได้ดังนี้

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{2}$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

เมื่อ p คือ ความดัน ของอากาศที่ตำแหน่งและเวลาใด ๆ ρ และ μ คือ ความหนาแน่น และความหนืดของอากาศในทางเดินหายใจ ตามลำดับ ค่าคงตัวที่ปรากฏในสมการที่ (1)-(3) นั้นมีค่าดังต่อไปนี้ $\rho = 1.148 \text{ kg/m}^3$ และ $\mu = 1.82 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ สมการที่ (1)-(3) เป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่มีค่าตัวแปรไม่ทราบค่า 3 ตัว คือ ค่าความเร็ว u และ v และค่าความดัน p ซึ่งขั้นต่อไปจะกำหนดค่าขอบและค่าเริ่มต้น เพื่อใช้ในกระบวนการหาผลเฉลยของปัญหาต่อไป

การกำหนดค่าขอบ

พิจารณาค่าขอบที่ใช้กับสมการการไหลต่อเนื่อง และสมการเนเวียร์-สโตกส์ ได้ดังนี้

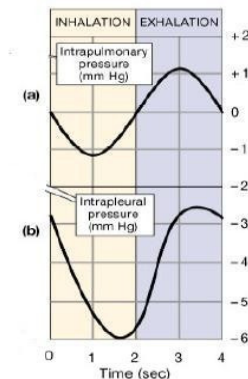
บริเวณทางเข้า (inlet) ซึ่งคือ ทางเข้าของช่องปาก เนื่องจากบริเวณนี้เป็นพื้นที่เปิดสัมผัสกับบรรยากาศภายนอก จึงไม่มีแรงดันใด ๆ เกิดขึ้น ทำให้ความดันอากาศที่บริเวณนี้มีค่าเป็นศูนย์ (Xu et al., 2006)

$$p = 0 \quad (4)$$

บริเวณผนังรอบทางเดินหายใจทั้งหมด กำหนดให้ความเร็วของอากาศ \mathbf{u} สอดคล้องกับสถานะที่ไม่มี การลื่นไถล (no-slip condition) นั่นคือ เมื่ออากาศเคลื่อนตัวเข้าไปใกล้ผนังทางเดินหายใจความเร็วของอากาศจะมีค่าเป็นศูนย์ (Xu et al., 2006)

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (5)$$

บริเวณทางออก (outlet) ซึ่งคือ ส่วนปลายของหลอดลมซึ่งติดกับขั้วปอด สิ่งที่ควบคุมการไหลของอากาศในทางเดินหายใจ คือ ความดันอากาศที่ปลายทางออกซึ่งอยู่ใกล้กับปอดนั่นเอง การหดและคลายตัวของปอดมีการหมุนเวียนเปลี่ยนวนเป็นวัฏจักร ทำให้ความดันอากาศที่บริเวณนี้ สามารถอธิบายได้ด้วยฟังก์ชันคาบของเวลา ซึ่งแทนด้วยฟังก์ชัน $P(t)$



รูปที่ 2 กราฟความดันภายในปอด (a) และเยื่อหุ้มปอด (b) ในหนึ่งรอบของการหายใจ

(ดัดแปลงจาก Hanitz, 2009)

จากกราฟของการเปลี่ยนแปลงความดันอากาศภายในปอด รูปที่ 2(a) พบว่าในช่วงแรกของกราฟ ค่าความดันติดลบน้อย ๆ จากนั้นจึงค่อย ๆ ติดลบมากขึ้นจนถึงจุดต่ำสุด และเมื่อเวลาผ่านไปค่าดังกล่าวจะค่อย ๆ เพิ่มขึ้นจนกลับมาเป็นบวกและถึงจุดสูงสุดแล้วจึงค่อย ๆ ลดลงอีก แกว่งไปมาเช่นนี้เรื่อยไป ดังนั้นค่าความดันที่บริเวณนี้จะสามารถอธิบายได้ด้วยฟังก์ชันไซน์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นลบนั่นเอง โดยค่าความดันสูงสุดหรือแอมพลิจูดในแต่ละคาบเวลามีค่าเป็น 1 มิลลิเมตรปรอท (mmHg) ซึ่งมีค่าเท่ากับ $133.32 \text{ Pa} \cdot s$ นอกจากนี้จากงานวิจัย (Zhang and Kleinstreuer, 2004) พบว่าคาบของการหายใจเข้า-ออก ของมนุษย์มีค่าประมาณ 4 วินาที เพราะฉะนั้นที่ปลายขอบของทางเดินหายใจด้านที่ติดกับปอด เราจึงกำหนดฟังก์ชันของความดันอากาศเป็น (อัญชูลี และคณะ, 2553; Jutharat and Supachara, 2011)

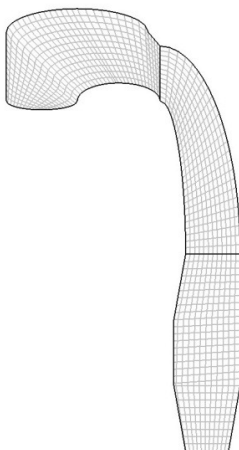
$$p(t) = -133.32 \sin\left(\frac{2\pi t}{4}\right) = -133.32 \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) = P \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \quad (6)$$

ณ จุดนี้นับเป็นจุดแรกที่เราได้พบว่าฟังก์ชันไซน์ได้มีบทบาทต่อลมหายใจมนุษย์

สมการที่ 1-2 เป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย และค่าขอบตามขอบต่าง ๆ ดังสมการ (4)-(6) ประกอบกันเป็นปัญหาค่าขอบ (boundary value problem, B.V.P.) สำหรับการไหลของอากาศในทางเดินหายใจ ถือได้ว่าเราได้มีแบบจำลองคณิตศาสตร์ที่ใช้อธิบายการไหลของอากาศในทางเดินหายใจแล้ว จากนั้นเราก็คือที่ย่อมที่จะอยากรู้ว่าความเร็วอากาศที่ตำแหน่งใด ๆ ที่ไม่ใช่ขอบในแต่ละขณะเวลาว่าจะเป็นอย่างไร นั่นคือเราต้องหาค่าเฉลยของความเร็วของการไหลของอากาศนั่นเอง และเมื่อเราได้ผลเฉลยที่ได้จากการสร้างแบบจำลองแบบนี้ที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันไซน์ เราค่อยมาดูกันว่าพลังของฟังก์ชันนี้มีแค่ไหน

การหาค่าเฉลยของการไหลของอากาศผลโดยวิธีเชิงตัวเลข

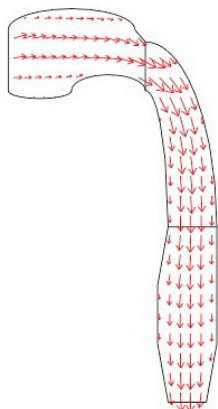
จากปัญหาค่าสำหรับการไหลของอากาศในทางเดินหายใจ ที่ขึ้นกับทั้งตำแหน่งและเวลา (transient problem) และเนื่องจากสมการเนเวียร์-สโตกส์เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น (nonlinear equations) ปัญหานี้จึงเป็นปัญหาค่าขอบแบบไม่เชิงเส้น ในการนี้เราจะใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จากโปรแกรมสำเร็จรูป COMSOL Multiphysics[®] 3.5a เพื่อหาค่าเฉลยของปัญหาค่าขอบนี้ โดยจะเริ่มจากการสร้างโดเมนของการศึกษาลงบนโปรแกรมสำเร็จรูป COMSOL Multiphysics[®] 3.5a ดังรูปที่ 1 จากนั้นจึงนำมาแบ่งออกเป็นหน่วย (element) เล็ก ๆ หรือเป็นโครงตาข่าย (mesh) ย่อย ๆ โดยโครงตาข่ายเหล่านี้ตัดกันที่จุดต่อ (node) จากนั้นกำหนดคุณสมบัติของของไหล และเงื่อนไขค่าขอบของปัญหามาตามที่ได้บรรยายไว้ แล้วนำเข้าสู่กระบวนการคำนวณและการวิเคราะห์ โดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แก้ระบบสมการเพื่อหาค่าผลลัพธ์ของการไหลที่จุดต่อ คือ ความเร็ว u และ v และความดัน p



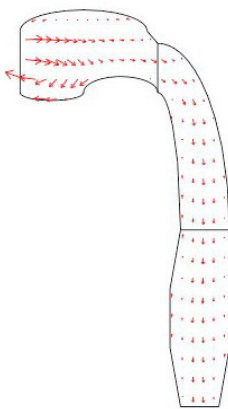
รูปที่ 3 โดเมนที่ถูกแบ่งออกเป็นโครงตาข่าย (mesh) ย่อย ๆ

ผลเฉลยที่ได้นั้นเป็นค่าตามจุดต่อและอยู่ในรูปแบบของค่าตัวเลข ค่าเหล่านั้นจะถูกนำมาประมาณค่าเข้าด้วยกัน (interpolate) เพื่อแสดงขนาดและทิศทางการไหลของอากาศที่เวลาต่าง ๆ ซึ่งในที่นี้โปรแกรมสำเร็จรูป COMSOL Multiphysics® 3.5a มีขีดความสามารถในการประมาณค่าและนำเสนอผลในรูปแบบของแผนภาพลูกศร (arrow plot) อยู่แล้ว

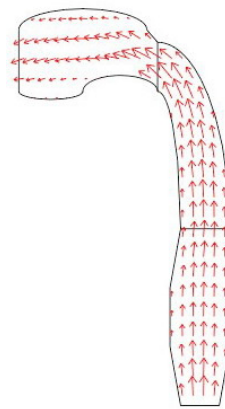
รูปที่ 4 (ก-ค) แสดงทิศทางการไหลแบบแผนภาพลูกศรของอากาศในทางเดินหายใจ เมื่อเวลาผ่านไป 1.4, 2.05 และ 2.5 วินาที ของแต่ละรอบการหายใจ พบว่า ณ เวลาต่างกันค่าความเร็วอากาศที่ตำแหน่งเดียวกัน จะมีขนาดและทิศทางต่างกันด้วย ทั้งนี้ในแต่ละขณะเวลา ความเร็วจะมีขนาดโตที่สุดบริเวณแนวแกนกลางของทางเดินหายใจแล้วลดขนาดลงตามสัดส่วน และมีค่าน้อยมากจนเป็นศูนย์ที่ผนังทางเดินหายใจ และพบว่าในช่วงสองวินาทีแรกการไหลของอากาศจะมีทิศทางไหลจากภายนอกเข้าสู่ท่อทางเดินหายใจ สอดคล้องกับความจริงเกี่ยวกับการหายใจของมนุษย์นั่นเอง



(ก) 1.4 วินาที



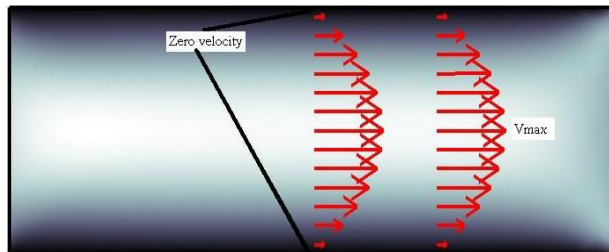
(ข) 2.055 วินาที



(ค) 2.5 วินาที

รูปที่ 4 แสดงทิศทางการไหลของอากาศแบบแผนภาพลูกศร (arrow plot) ในทางเดินหายใจ ณ เวลาต่าง ๆ ในหนึ่งรอบของการหายใจ

จากวิธีการหาผลเฉลยด้วยวิธีเชิงตัวเลขตามข้างต้นนั้นต้องอาศัยขั้นตอนวิธีการและต้องอาศัยคอมพิวเตอร์ที่มีประสิทธิภาพและเสียค่าใช้จ่ายสูง เราจะนำเสนอวิธีการหาผลเฉลยอีกวิธีหนึ่งซึ่งจะเรียกว่าการหาผลด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ ซึ่งท่านจะได้เห็นอนุภาพของฟังก์ชันไซน์อย่างแท้จริง จากสมมติฐานที่ว่า การไหลของอากาศในทางเดินหายใจที่เราทำการศึกษาเป็นการไหลแบบราบเรียบ เราจะแนะนำให้ท่านได้รู้จักกับการไหลแบบราบเรียบนี้ว่าการไหลแบบนี้มีความเร็วเป็นศูนย์ที่ผนังท่อและความเร็วจะมีลักษณะการเพิ่มเป็นฟังก์ชันพาราโบลา คือเพิ่มตามระยะห่างจากผนังและมีความเร็วสูงสุดตามแนวกึ่งกลางของท่อ แสดงได้ดังรูปที่ 5 และความเร็วของการไหลนี้ เข้าข่ายที่จะสามารถอธิบายได้ในรูปของฟังก์ชันไซน์ของระยะห่างจากผนังได้



รูปที่ 5 ลักษณะของการไหลแบบราบเรียบสำหรับของไหลที่มีความหนืดคงที่เมื่ออุณหภูมิคงที่

อีกทั้งจากการศึกษางานวิจัยจำนวนหนึ่งพบว่า สำหรับบางเงื่อนไขสมการเนเวียร์-สโตกส์ก็สามารถหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ได้ เช่น การไหลนั้นไหลผ่านช่องตรงขนาน หน้าตัดคงที่ (Tsangaris and Vlachakis, 2003) หรือแม้หากเป็นกรณีที่ไม่ใช่การไหลผ่านช่องตรง หน้าตัดคงที่ ก็มีความพยายามในการหาคำตอบของสมการเนเวียร์-สโตกส์ ในรูปแบบเชิงวิเคราะห์เช่นกัน แต่ก็ต้องอาศัยการแปลง เช่น การแปลง Hodograph-Legendre (Mohyuddin et al., 2008) ดังนั้นในส่วนต่อจากนี้เราจะนำเสนอวิธีการหาผลเฉลยในรูปแบบเชิงวิเคราะห์สำหรับปัญหาการไหลของอากาศในทางเดินหายใจ (Supachara and Jutharat, 2012) และเราจะได้ชี้ให้ท่านผู้อ่านได้เห็น ว่า ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์นั้นมีพลังอนุภาพต่อลมหายใจของมนุษย์เรามากได้อย่างไร

การหาผลเฉลยของการไหลของอากาศผลโดยวิธีเชิงวิเคราะห์

การหาความเร็วของอากาศในรูปแบบเชิงวิเคราะห์ ในแต่ละบริเวณมีความแตกต่างกันออกไป ขึ้นอยู่กับรูปร่างของบริเวณนั้น ๆ ซึ่งสามารถจำแนกออกเป็น 2 ลักษณะ จะมีลักษณะเป็นช่องทางเดินหายใจในแนวแกนนอน และในแนวแกนตั้ง

การหาคำตอบเชิงวิเคราะห์ของความเร็วอากาศสำหรับบริเวณที่มีลักษณะในแนวนอน

เพื่อให้คำตอบของสมการอยู่ในรู้อย่างง่าย จึงกำหนดให้การไหลมีการพัฒนาเต็มที่ (fully developed flow) จะได้ว่า ความเร็วของอากาศในทิศตามแนวแกน y มีค่าเป็น 0 นั่นคือ $v = 0$ และความเร็วตามแนวแกน x จะขึ้นอยู่กับตำแหน่งในแนวแกน y เท่านั้น ซึ่งการไหลนี้จะสอดคล้องกับสมการการไหลต่อเนื่อง ดังนั้นสมการที่ (3) จึงไม่นำมาพิจารณา และเมื่อพิจารณาสมการที่ (2) จะได้

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (7)$$

เนื่องจากการไหลในที่นี้เกิดจากการเปลี่ยนแปลงของความดันแบบแกว่งกวัด (oscillating pressure gradient) โดยที่อัตราการเปลี่ยนแปลงความดัน เมื่อเทียบกับการเปลี่ยนแปลงของระยะตามแนวนอนมีขนาดเพิ่มขึ้นเป็น $\frac{P}{a} \sin(\omega t)$ นั่นคือ $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{P}{a} \sin(\omega t)$ และ $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ ซึ่ง $\frac{P}{a}$ คือ แอมพลิจูดของการเปลี่ยนแปลงความดัน (pressure gradient) เมื่อ a คือ ความยาวตามแนวแกนนอน และ $\omega = \frac{2\pi}{T}$ คือ ความถี่เชิงมุม (angular frequency)

จากการศึกษางานวิจัยทางการแพทย์ (Zhang and Kleinstreuer, 2004) พบว่า คาบของการหายใจของมนุษย์มีค่าประมาณ 4 วินาที นั่นคือ $\omega = \frac{\pi}{2}$ และ ความเร็วที่เกิดจากการไหลของอากาศนี้มีลักษณะเป็นฟังก์ชันคาบ ดังนั้นความเร็วตามแนวนอนนี้ จึงถูกสมมติว่า อยู่ในรูปแบบของ

$$u(y, t) = u_s \sin(\omega t) + u_c \cos(\omega t) \quad (8)$$

เพื่อเป็นการหาผลเฉลยได้อย่างเที่ยงตรง เราจะเปลี่ยนตัวแปรเหล่านี้ให้เป็นตัวแปรไร้มิติจะได้

$$\tilde{y} = \frac{y}{b}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{Pb^2} \mu a \quad \text{และ} \quad \alpha = b \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \quad (9)$$

เมื่อ b คือ ความกว้างตามแนวตั้ง และจากสมการที่ (8) หาอนุพันธ์เทียบกับ t จะได้

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \omega u_s \cos(\omega t) - \omega u_c \sin(\omega t) \quad (10)$$

จากสมการที่ (8) หาอนุพันธ์อันดับสองเทียบกับ y จะได้

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{d^2 u_s}{dy^2} \sin(\omega t) + \frac{d^2 u_c}{dy^2} \cos(\omega t) \quad (11)$$

นำสมการที่ (10) และสมการที่ (11) ไปแทนในสมการที่ (7) จะได้

$$\begin{aligned} & \omega u_s \cos(\omega t) - \omega u_c \sin(\omega t) \\ &= -\frac{P}{\rho a} \sin(\omega t) + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{d^2 u_s}{dy^2} \sin(\omega t) + \frac{d^2 u_c}{dy^2} \cos(\omega t) \right) \end{aligned} \quad (12)$$

ทำการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้

$$\omega u_s = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{d^2 u_c}{dy^2} \right) \quad \text{และ} \quad -\omega u_c = -\frac{P}{\rho a} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{d^2 u_s}{dy^2} \right) \quad (13)$$

คุณสมบัติทั้งสองสมการด้วย $\frac{\alpha^2}{\omega}$ เนื่องจาก $\frac{\alpha^2}{\omega} = \frac{b^2 \omega}{\nu \omega} = \frac{b^2 \rho}{\mu}$ ดังนั้น

$$\alpha^2 u_s = b^2 \left(\frac{d^2 u_c}{dy^2} \right) \quad \text{และ} \quad -\alpha^2 u_c = -\frac{P b^2}{\mu a} + b^2 \left(\frac{d^2 u_s}{dy^2} \right) \quad (14)$$

คุณสมบัติทั้งสองสมการด้วย $\frac{\mu a}{P b^2}$ จะได้

$$\alpha^2 \tilde{u}_s = \frac{\mu a}{P b^2} b^2 \left(\frac{d^2 u_c}{dy^2} \right) \quad \text{และ} \quad -\alpha^2 \tilde{u}_c = -1 + \frac{\mu a}{P b^2} b^2 \left(\frac{d^2 u_s}{dy^2} \right) \quad (15)$$

เนื่องจาก $\frac{d^2 u}{d\tilde{y}^2} = b^2 \left(\frac{d^2 u}{dy^2} \right)$ และ $\tilde{u} = \frac{u}{P b^2} \mu a$ ดังนั้น จึงได้ระบบสมการเฮลมิโฮลต์ซ์ที่ไม่เป็น

เอกพันธ์ในหนึ่งมิติ (Rosu and Romero, 1999) ดังนี้

$$\alpha^2 \tilde{u}_s = \frac{d^2 \tilde{u}_c}{d\tilde{y}^2}, \quad -\alpha^2 \tilde{u}_c = -1 + \frac{d^2 \tilde{u}_s}{d\tilde{y}^2} \quad (16)$$

เงื่อนไขค่าขอบสำหรับ \tilde{u}_s และ \tilde{u}_c เป็นเงื่อนไขการไม่ลื่นไหล ดังนี้

$$\tilde{u}_s(0) = 0, \quad \tilde{u}_c(0) = 0, \quad \tilde{u}_s(1) = 0 \quad \text{และ} \quad \tilde{u}_c(1) = 0 \quad (17)$$

จากสมการที่ (18) ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขค่าขอบในสมการที่ (19) สามารถกำหนดได้ด้วยการวิเคราะห์อนุกรมฟูเรียร์ (fourier series analysis) ของ \tilde{u}_s และ \tilde{u}_c สำหรับ \tilde{y} ดังนั้น \tilde{u}_s , \tilde{u}_c และ 1 สามารถแทนได้ในรูปแบบของการกระจายอนุกรมฟูเรียร์ (fourier expansion) ดังนี้

$$\tilde{u}_s = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\pi\tilde{y}) \quad (18)$$

$$\tilde{u}_c = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\pi\tilde{y}) \quad (19)$$

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(k\pi\tilde{y}) \quad (20)$$

จากสมการที่ (18) และสมการที่ (19) หาอนุพันธ์อันดับสองเทียบ \tilde{y} แล้วแทนค่าลงในระบบสมการที่ (16) จะได้

$$\begin{aligned} \alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\pi\tilde{y}) &= -\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} B_k k^2 \sin(k\pi\tilde{y}) \\ -\alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\pi\tilde{y}) &= -\sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(k\pi\tilde{y}) - \pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k k^2 \sin(k\pi\tilde{y}) \end{aligned} \quad (21)$$

ทำการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้

$$\alpha^2 A_k = -\pi^2 B_k k^2, \quad \alpha^2 B_k = C_k + \pi^2 A_k k^2, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (22)$$

ดังนั้น เราจะได้ระบบสมการพีชคณิต ซึ่งเป็นผลเฉลยของสัมประสิทธิ์ A_k และ B_k ดังนี้

$$A_k = \left(\frac{-\pi^2 k^2}{\alpha^4 + \pi^4 k^4} \right) C_k, \quad B_k = \left(\frac{\alpha^2}{\alpha^4 + \pi^4 k^4} \right) C_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (23)$$

โดยที่ค่าสัมประสิทธิ์ C_k คำนวณได้ดังนี้

$$C_k = \frac{\int_0^1 \sin(k\pi\tilde{y}) d\tilde{y}}{\int_0^1 \sin^2(k\pi\tilde{y}) d\tilde{y}} = \frac{2}{k\pi} (1 - (-1)^k), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (24)$$

การหาคำตอบเชิงวิเคราะห์ของความเร็วอากาศสำหรับบริเวณที่อยู่ในแนวตั้ง

ในการทำงานเกี่ยวกับการหาคำตอบตามแนวนอน เมื่อเรากำหนดให้การไหลมีการพัฒนาเต็มที่ จะได้ว่าความเร็วของอากาศในทิศตามแนวแกน x มีค่าเป็น 0 นั่นคือ $u = 0$ และความเร็วตามแนวแกน y จะขึ้นอยู่กับตำแหน่งในแนวแกน x เท่านั้น ซึ่งการไหลนี้จะสอดคล้องกับสมการการไหลต่อเนื่อง ดังนั้น สมการที่ (2) จึงไม่ถูกนำมาพิจารณา เมื่อพิจารณาสมการที่ (3) จะได้

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \quad (25)$$

ทำงานองเดียวกันการไหลนี้เกิดจากการเปลี่ยนแปลงของความดันแบบแกว่งกวัดและมีอัตราการเปลี่ยนแปลงแบบลดลงเมื่อเทียบกับการเปลี่ยนแปลงระยะตามแนวแกนตั้ง นั่นคือ $\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{P}{a} \sin(\omega t)$ และ

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ ซึ่ง $\frac{P}{a}$ คือ แอมพลิจูดของการเปลี่ยนแปลงความดัน เมื่อ a ความสูงตามแนวตั้ง และ $\omega = \frac{2\pi}{T}$ คือ

ความถี่เชิงมุม (angular frequency) ทำงานองเดียวกันเราก็สมมติว่า ความเร็วตามแนวตั้งนี้ จึงอยู่ในรูปแบบของ

$$v(x, t) = v_s \sin(\omega t) + v_c \cos(\omega t) \quad (26)$$

เมื่อเราจะเปลี่ยนตัวแปรเหล่านี้ให้เป็นตัวแปรไร้มิติ จะได้

$$\tilde{x} = \frac{x}{b}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{Pb^2} \mu a \quad \text{และ} \quad \alpha = b \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \quad (27)$$

เมื่อ b คือ ความกว้างตามแนวนอน และจากสมการที่ (26) หาคอนพจน์เทียบ t จะได้

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \omega v_s \cos(\omega t) - \omega v_c \sin(\omega t) \quad (28)$$

จากสมการที่ (26) หาคอนพจน์อันดับสองเทียบ x จะได้

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{d^2 v_s}{dx^2} \sin(\omega t) + \frac{d^2 v_c}{dx^2} \cos(\omega t) \quad (29)$$

นำสมการที่ (28) และสมการที่ (29) ไปแทนในสมการที่ (25) จะได้

$$\omega v_s \cos(\omega t) - \omega v_c \sin(\omega t) = \frac{P}{\rho a} \sin(\omega t) + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{d^2 v_s}{dx^2} \sin(\omega t) + \frac{d^2 v_c}{dx^2} \cos(\omega t) \right) \quad (30)$$

ทำการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้

$$\omega v_s = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{d^2 v_c}{dx^2} \right) \quad \text{และ} \quad -\omega v_c = \frac{P}{\rho a} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{d^2 v_s}{dx^2} \right) \quad (31)$$

ดังนั้น

$$\alpha^2 v_s = b^2 \left(\frac{d^2 v_c}{dx^2} \right) \quad \text{และ} \quad -\alpha^2 v_c = \frac{Pb^2}{\mu a} + b^2 \left(\frac{d^2 v_s}{dx^2} \right) \quad (32)$$

คูณสมการทั้งสองสมการด้วย $\frac{\mu a}{Pb^2}$ จะได้

$$\alpha^2 \tilde{v}_s = \frac{\mu a}{Pb^2} b^2 \left(\frac{d^2 v_c}{dx^2} \right) \quad \text{และ} \quad -\alpha^2 \tilde{v}_c = 1 + \frac{\mu a}{Pb^2} b^2 \left(\frac{d^2 v_s}{dx^2} \right) \quad (33)$$

เนื่องจาก $\frac{d^2 v}{d\tilde{x}^2} = b^2 \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)$ และ $\tilde{v} = \frac{v}{Pb^2} \mu a$ จึงได้ระบบสมการเฮลมิโฮลตซ์ไม่เป็นเอกพันธ์

ในหนึ่งมิติ

$$\alpha^2 \tilde{v}_s = \frac{d^2 \tilde{v}_c}{d\tilde{x}^2}, \quad -\alpha^2 \tilde{v}_c = 1 + \frac{d^2 \tilde{v}_s}{d\tilde{x}^2} \quad (34)$$

เงื่อนไขค่าขอบสำหรับ \tilde{v}_s และ \tilde{v}_c เป็นเงื่อนไขการไม่สั่นไหล ดังนี้

$$\tilde{v}_s(0) = 0, \quad \tilde{v}_c(0) = 0, \quad \tilde{v}_s(1) = 0 \quad \text{และ} \quad \tilde{v}_c(1) = 0 \quad (35)$$

จากสมการที่ (34) ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขค่าขอบในสมการที่ (35) สามารถกำหนดได้ด้วยการวิเคราะห์อนุกรมฟูเรียร์ของ \tilde{v}_s และ \tilde{v}_c สำหรับ \tilde{x} ดังนั้น \tilde{v}_s , \tilde{v}_c และ 1 สามารถแทนได้ในรูปแบบของการกระจายอนุกรมฟูเรียร์

$$\tilde{v}_s = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(m\pi\tilde{x}) \quad (36)$$

$$\tilde{v}_c = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin(m\pi\tilde{x}) \quad (37)$$

$$1 = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin(m\pi\tilde{x}) \quad (38)$$

จากสมการที่ (36) และสมการที่ (37) หาอนุพันธ์อันดับสองเทียบกับ \tilde{x} แล้วแทนค่าลงในระบบสมการที่ (34) จะได้

$$\begin{aligned} \alpha^2 \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(m\pi\tilde{x}) &= -\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} B_m m^2 \sin(m\pi\tilde{x}) \\ -\alpha^2 \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin(m\pi\tilde{x}) &= \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin(m\pi\tilde{x}) - \pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} A_m m^2 \sin(m\pi\tilde{x}) \end{aligned} \quad (39)$$

ทำการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้

$$\alpha^2 A_m = -\pi^2 B_m m^2, \quad \alpha^2 B_m = -C_m + \pi^2 A_m m^2, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (40)$$

ดังนั้น เราจะได้ระบบสมการพีชคณิต ซึ่งเป็นผลเฉลยของสัมประสิทธิ์ A_m และ B_m ดังนี้

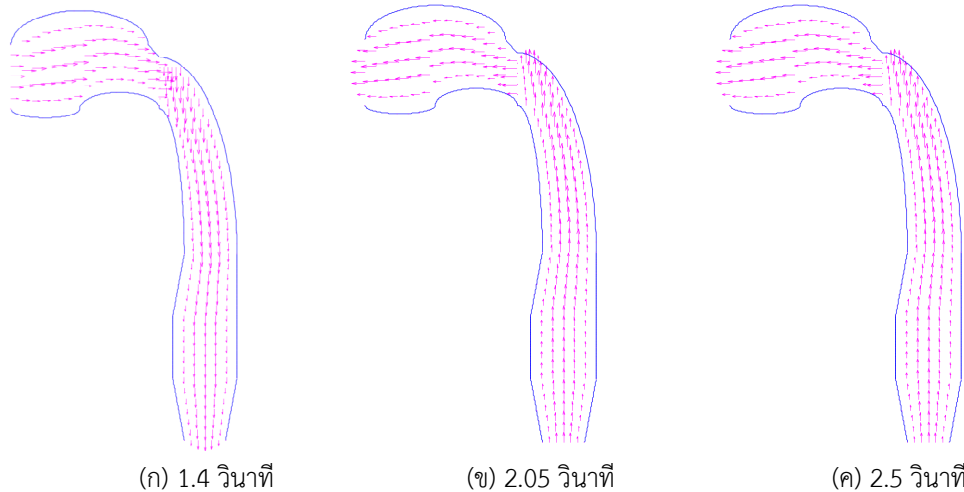
$$A_m = \left(\frac{\pi^2 m^2}{\alpha^4 + \pi^4 m^4} \right) C_m, \quad B_m = \left(\frac{-\alpha^2}{\alpha^4 + \pi^4 m^4} \right) C_m, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (41)$$

โดยที่ค่าสัมประสิทธิ์ C_m คำนวณได้จากดังนี้

$$C_m = \frac{\int_0^1 \sin(m\pi\tilde{x}) d\tilde{x}}{\int_0^1 \sin^2(m\pi\tilde{x}) d\tilde{x}} = \frac{2}{m\pi} (1 - (-1)^m), \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (42)$$

เมื่อเรานำผลเฉลยที่ได้ในรูปแบบเชิงวิเคราะห์ ที่ได้จากการอาศัยฟังก์ชันไซน์และโคไซน์เกี่ยวข้องในทุกขั้นตอน มาเขียนโปรแกรมเพื่อจำลองการไหลอากาศในทางเดินหายใจ โดยอาศัยโปรแกรม MATLAB ผลในการจำลองแบบแผนภาพพลุกระจายของอากาศในทางเดินหายใจ เมื่อเวลาผ่านไป 1.4, 2.05 และ 2.5 วินาทีของแต่ละรอบการหายใจ พบว่าผลเป็นไปในทำนองเดียวกับผลเฉลยที่ได้จากวิธีเชิงตัวเลข ณ เวลาต่างกันค่าความเร็วอากาศที่ตำแหน่งเดียวกัน จะมีขนาดและทิศทางต่างกันด้วย และในแต่ละขณะเวลาความเร็วจะมีขนาดโตที่สุดบริเวณแนวแกนกลางของทางเดินหายใจแล้วลดขนาดลงตามสัดส่วน และมีค่าน้อยมากจนเป็นศูนย์ที่ผนังทางเดินหายใจ

จากผลการจำลองพบว่า ในช่วงสองวินาทีแรกการไหลของอากาศจะมีทิศทางการไหลจากภายนอกเข้าสู่ท่อทางเดินหายใจ รูปที่ 6



รูปที่ 6 แสดงทิศทางการไหลของอากาศในทางเดินหายใจแบบแผนภาพ (arrow plot) ในทางเดินหายใจ ณ เวลาต่าง ๆ ในหนึ่งรอบของการหายใจ

ข้อสรุป

เราก็ได้เห็นบทบาทของฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ คือ ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ทั้งในแง่การสร้างแบบจำลองและการหาผลเฉลยที่น่าเชื่อถือตามหลักการคณิตศาสตร์มาแล้ว และพบว่าผลเฉลยของการไหลของอากาศที่ได้จากทั้งวิธีการเชิงตัวเลขและวิธีการเชิงวิเคราะห์ให้ผลสอดคล้องไปในทำนองเดียวกัน คือ มีการเปลี่ยนแปลงทั้งขนาดและทิศทางตามการเปลี่ยนแปลงของเวลา คือ มีการไหล เข้า-ออก เป็นคาบของเวลาซึ่งสอดคล้องกับความเป็นจริงตามการทำงานของระบบทางเดินหายใจ มีความถูกต้องแม่นยำในระดับที่น่าพอใจ เป็นการยืนยันต่อท่านผู้อ่านถึงประโยชน์และความเชื่อมโยงของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ที่มีต่อลมหายใจมนุษย์ ตามที่ได้กล่าวไว้ในตอนต้นของบทความนั่นเอง

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนต้องขอขอบคุณ ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ที่อำนวยความสะดวกโปรแกรม MATLAB และ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล ที่เอื้อเฟื้อโปรแกรมสำเร็จรูป COMSOL Multiphysics[®] 3.5a เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลข เพื่อใช้ในการจำลองผลประกอบในบทความชิ้นนี้ และขอขอบคุณ นางสาวอัญชุลี ณ ตะกั่วทุ่ง และ นางสาวจุฑารัตน์ โพธิ์หลวง นักศึกษาในที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่ช่วยกันศึกษาการไหลของอากาศในทางเดินหายใจมนุษย์จนเป็นที่มาของบทความชิ้นนี้

เอกสารอ้างอิง

- น.พ.ธวัช ชาญชฎานนท์. (n.d.) (2552). Functional Anatomy of the Pulmonary System. สืบค้นเมื่อวันที่ 17 ตุลาคม 2552, จาก <http://medinfo2.psu.ac.th/anesth/education/functional.html>.
- อัญชุลี ณ ตะกั่วทุ่ง, สุพัชระ คงนวน, สิทธิพงศ์ รักตะเมธากุล. (2010). การจำลองเชิงตัวเลขสำหรับการไหลอากาศในทางเดินหายใจมนุษย์โดยผ่านช่องปาก. Proceedings of the 15th Annual Meeting in Mathematics.
- Allen, G. M., Shortall, B. P., Gemci, T., Corcoran, T. E. and Chigier, N. A. (2004). Computational simulations of airflow in an in vitro model of the pediatric upper airways. *Journal of Biomechanical Engineering* 126(5): 604-613.
- Ball, C. G., Uddin, M. and Pollard, A. (2008). Mean flow structures inside the human upper airway. *Flow Turbulence Combust* 81: 155-188.
- Bit, A., Chattopadhyay, H. and Nag, D. (2009) Study of airflow in the trachea of a bronchopulmonary patient using CT data. *Indian Journal of Biomechanics. (Special Issue):* 31-34.
- Christianto, V. and Smarandache, F. (2008). An exact Mapping from Navier-Stokes to Schrödinger equation via Riccati equation. *Progress in Physics* 1: 38-39.
- Fadl, A., Wang, J. and Cheng (2007). Effects of MDI spray angle on aerosol penetration efficiency through an oral airway cast. *Journal of Aerosol Science* 38: 853-864.
- Jutarat Pholuang and Supachara Kongnuan (2011). Analytical solution of air flow in a human oral airway. Proceedings of The 15th Annual Meeting in Mathematics.
- Kongnuan, S. and Pholuang, J. (2012). A Fourier Series-Based Analytical Solution for the Oscillating Airflow in a Human Respiratory Tract. *Int. J of Pure & Applied Maths.* 78(5): 721-734.
- Lee, D. Y., Wexler, A. S., Fanucchi, M. V. and Plopper, C. G. (2008). Expiration rate drives human airway design. *Journal of Theoretical Biology* 253: 381-387.
- Lee, Y. (2005). Finite Element simulation of the oscillatory flow in a channel with the heat transfer through a hot bump. Excerpt from the Proceeding of the COMSOL Multiphysics User's Conference 2005 Boston.
- Luo, X. Y., Hinton, J. S., Liew T. T. and Tan K. K. (2004). LES modeling of flow in a simple airway model. *Medical engineering & Physics* 26: 403-413.
- Mohyuddin, M., Siddiqui, AM., Hayat, T., Siddqui, J. and Asghar, S. (2008). Exact solutions of time-dependent Navier-Stokes equations by Hodograph-Legendre transformation method. *Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences* 24(3): 257-268.
- Rosu, H. and Romero, J.L. (1999). Ermakov approach for the one-dimensional Helmholtz Hamiltonian. *Nuovo Cimento B* 114: 569-574.
- Tang, H., Tu, J. Y., Li, H. F., Au, -Hijleh. B., Xue, C. C. and Li, C. G. (2004). Dynamic analysis of airflow features in a 3D real-anatomical geometry of the human nasal cavity. 15th Australasian Fluid Mechanics Conference.
- Teager, H.M. (1980). Some observations on oral air flow during phonation. *IEEE Trans. Acoust. Speech. Signal Process.* 28(5): 599-601.
- Tsangaris, S. and Vlachakis, NW. (2003). Exact solution of the Navier-Stokes equations for the oscillating flow in duct of a cross-section of right-angled isosceles triangle. *Z. angew. Math. Phys.* 54: 1094-1100.

- Wang, K., Denney, T. H., Morrison, E. E. and Vodyanoy, V. J. (2005). Numerical simulation of air flow in the human nasal cavity. Proceedings of the 2005. IEEE Engineering in Medicine and Biology. 27th Annual Conference Shanghai China. 5607-5610.
- Wen, J., Inthavong, K., Tian, Z. F., Tu, J. Y. and Li, C. G. (2007). Airflow patterns in both sides of a realistic human nasal cavity for laminar and turbulent conditions. 16th Australasian Fluid Mechanics Conference. 68-74.
- Xu, Q., Leong, F. Y. and Wang, C. (2008). Transport and deposition of inertial aerosols in bifurcated tubes under oscillatory flow. Chemical Engineering Science 64: 830-846.
- Zhang, Z. and Kleinstreuer, C. (2004). Airflow structures and nano-particle deposition in a human upper airway model. Journal of Computational Physics 198: 178-210.
- Hranitz, M. John. (n.d.) (2009). APHNT: Respiratory Physiology Outlines. Retrieve July 26, 2009, from <http://facstaff.bloomu.edu/jhranitz/Courses/APHNT/Outlines/Respir%20phys.pdf>

