



จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านทุกด้านเป็นจำนวนเต็ม The Number of Triangles with Integer Side Lengths

นิรุต มีเกิด¹

บทคัดย่อ

ในบทความนี้เราได้กำหนดสูตรสำหรับหาจำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านทุกด้านเป็นจำนวนเต็ม และมีด้านที่ยาวที่สุดไม่เกิน n

ABSTRACT

In this paper, we establish the formula for finding the number of triangles with integer side lengths and the longest side less than or equal to n .

คำสำคัญ: รูปสามเหลี่ยม

Keyword: Triangles

รูปสามเหลี่ยมเป็นหนึ่งในรูปร่างพื้นฐานในเรขาคณิตซึ่งมีสมบัติที่สำคัญหลายประการ ผลจากการศึกษาเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมก่อให้เกิดแนวคิดและความรู้ต่าง ๆ มากมาย เช่น ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ความคล้าย รวมทั้งทฤษฎีบทที่สำคัญหลายทฤษฎี เช่น ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ทฤษฎีบทของธาไลส เป็นต้น สมบัติพื้นฐานที่สำคัญประการหนึ่งของรูปสามเหลี่ยม คือ ผลบวกของความยาวของสองด้านใด ๆ ของรูปสามเหลี่ยมต้องมากกว่าความยาวของด้านที่เหลือ ซึ่งเราเรียกสมบัตินี้ว่าสมการอิงรูปสามเหลี่ยม (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2552)

จากสมการอิงรูปสามเหลี่ยม ถ้ากำหนดความยาวด้านมาให้ 3 ด้าน แล้วพบว่าผลบวกของความยาวของสองด้านใด ๆ มากกว่าความยาวของด้านที่เหลือเราสามารถสร้างเป็นรูปสามเหลี่ยมได้ เช่น ความยาวของด้านทั้งสามเป็น 3, 4 และ 5 หน่วย หรือ 6, 9 และ 9 หน่วย แต่ถ้าพบว่าผลบวกของความยาวด้านของสองด้านไม่มากกว่าความยาวของด้านที่เหลือแล้ว เราจะไม่สามารถสร้างให้เป็นรูปสามเหลี่ยมได้ เช่น ความยาวของด้านทั้งสามเป็น 3, 5 และ 9 หน่วย หรือ 4, 9 และ 13 หน่วย

¹โรงเรียนบ้านไร่พิทยาคม อำเภอศรีสำโรง จังหวัดสุโขทัย 64120

ต่อไปจะกล่าวถึงการนำความรู้เกี่ยวกับสมการเชิงรูปสามเหลี่ยมไปใช้ในการหาจำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านทุกด้านเป็นจำนวนเต็ม

ให้ a , b และ c เป็นความยาวด้านแต่ละด้าน ซึ่งต่อไปจะเขียนแทนด้วย (a, b, c) เมื่อ a , b และ c เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $a \leq b \leq c$

กรณี $c = 1$ จะได้ $(1, 1, 1)$ สามารถประกอบเป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านแต่ละด้านเป็น 1

กรณี $c = 2$ จะได้ $(1, 2, 2)$ และ $(2, 2, 2)$ สามารถประกอบเป็นรูปสามเหลี่ยมได้ แต่ $(1, 1, 2)$ ไม่สามารถประกอบเป็นรูปสามเหลี่ยมได้

กรณี $c = 3$ จะได้ $(1, 3, 3)$, $(2, 2, 3)$, $(2, 3, 3)$ และ $(3, 3, 3)$ สามารถประกอบเป็นรูปสามเหลี่ยมได้ แต่ $(1, 1, 3)$ และ $(1, 2, 3)$ ไม่สามารถประกอบเป็นรูปสามเหลี่ยมได้

กรณี $c = 4$ จะได้ $(1, 4, 4)$, $(2, 3, 4)$, $(2, 4, 4)$, $(3, 3, 4)$, $(3, 4, 4)$ และ $(4, 4, 4)$ สามารถประกอบเป็นรูปสามเหลี่ยมได้ แต่ $(1, 1, 4)$, $(1, 2, 4)$, $(1, 3, 4)$ และ $(2, 2, 4)$ ไม่สามารถประกอบเป็นรูปสามเหลี่ยมได้

กรณี $c = 5$ จะได้ $(1, 5, 5)$, $(2, 4, 5)$, $(2, 5, 5)$, $(3, 3, 5)$, $(3, 4, 5)$, $(3, 5, 5)$, $(4, 4, 5)$, $(4, 5, 5)$ และ $(5, 5, 5)$ สามารถประกอบเป็นรูปสามเหลี่ยมได้ แต่ $(1, 1, 5)$, $(1, 2, 5)$, $(1, 3, 5)$, $(1, 4, 5)$, $(2, 2, 5)$ และ $(2, 3, 5)$ ไม่สามารถประกอบเป็นรูปสามเหลี่ยมได้

รูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านทุกด้านเป็นจำนวนเต็มและมีด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ n แสดงดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 แจกแจงรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ n เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots, 10$

n	รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ n
1	(1, 1, 1)
2	(1, 2, 2), (2, 2, 2)
3	(1, 3, 3), (2, 2, 3), (2, 3, 3), (3, 3, 3)
4	(1, 4, 4), (2, 3, 4), (2, 4, 4), (3, 3, 4), (3, 4, 4), (4, 4, 4)
5	(1, 5, 5), (2, 4, 5), (2, 5, 5), (3, 3, 5), (3, 4, 5), (3, 5, 5), (4, 4, 5), (4, 5, 5), (5, 5, 5)
6	(1, 6, 6), (2, 5, 6), (2, 6, 6), (3, 4, 6), (3, 5, 6), (3, 6, 6), (4, 4, 6), (4, 5, 6), (4, 6, 6), (5, 5, 6), (5, 6, 6), (6, 6, 6)
7	(1, 7, 7), (2, 6, 7), (2, 7, 7), (3, 5, 7), (3, 6, 7), (3, 7, 7), (4, 4, 7), (4, 5, 7), (4, 6, 7), (4, 7, 7), (5, 5, 7), (5, 6, 7), (5, 7, 7), (6, 6, 7), (6, 7, 7), (7, 7, 7)
8	(1, 8, 8), (2, 7, 8), (2, 8, 8), (3, 6, 8), (3, 7, 8), (3, 8, 8), (4, 5, 8), (4, 6, 8), (4, 7, 8), (4, 8, 8), (5, 5, 8), (5, 6, 8), (5, 7, 8), (5, 8, 8), (6, 6, 8), (6, 7, 8), (6, 8, 8), (7, 7, 8), (7, 8, 8), (8, 8, 8)
9	(1, 9, 9), (2, 8, 9), (2, 9, 9), (3, 7, 9), (3, 8, 9), (3, 9, 9), (4, 6, 9), (4, 7, 9), (4, 8, 9), (4, 9, 9), (5, 5, 9), (5, 6, 9), (5, 7, 9), (5, 8, 9), (5, 9, 9), (6, 6, 9), (6, 7, 9), (6, 8, 9), (6, 9, 9), (7, 7, 9), (7, 8, 9), (7, 9, 9), (8, 8, 9), (8, 9, 9), (9, 9, 9)
10	(1, 10, 10), (2, 9, 10), (2, 10, 10), (3, 8, 10), (3, 9, 10), (3, 10, 10), (4, 7, 10), (4, 8, 10), (4, 9, 10), (4, 10, 10), (5, 6, 10), (5, 7, 10), (5, 8, 10), (5, 9, 10), (5, 10, 10), (6, 6, 10), (6, 7, 10), (6, 8, 10), (6, 9, 10), (6, 10, 10), (7, 7, 10), (7, 8, 10), (7, 9, 10), (7, 10, 10), (8, 8, 10), (8, 9, 10), (8, 10, 10), (9, 9, 10), (9, 10, 10), (10, 10, 10)

จากตารางที่ 1 จะพบว่ารูปแบบของความยาวด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ n สามารถแบ่งเป็น n ชุด คือ ชุดที่มีด้านที่สั้นที่สุดเท่ากับ 1 ชุดที่มีด้านที่สั้นที่สุดเท่ากับ 2 ชุดที่มีด้านที่สั้นที่สุดเท่ากับ 3 ไปจนถึงชุดที่มีด้านที่สั้นที่สุดเท่ากับ n และเมื่อนำจำนวนรูปสามเหลี่ยมในแต่ละชุดมาเรียงต่อกันจะได้แผนภาพแสดงจำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ n ดังนี้

ด้านที่ยาวที่สุด	จำนวนรูปสามเหลี่ยม
1	1
2	1 1
3	1 2 1
4	1 2 2 1
5	1 2 3 2 1
6	1 2 3 3 2 1
7	1 2 3 4 3 2 1
8	1 2 3 4 4 3 2 1
9	1 2 3 4 5 4 3 2 1
10	1 2 3 4 5 5 4 3 2 1
⋮	...

จากแผนภาพ เราสามารถหาจำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ n ได้ โดยการหาผลรวมของจำนวนแต่ละจำนวนในแถวที่ n เช่น จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ 1 คือ 1 รูป จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ 2 คือ $1+1 = 2$ รูป จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ 3 คือ $1+2+1 = 4$ รูป

Meekoed (2011) ได้แสดงให้เห็นว่า จำนวนรูปสามเหลี่ยมทั้งหมดที่มีความยาวด้านทุกด้านเป็นจำนวนเต็มและมีด้านที่ยาวที่สุดไม่เกิน n ซึ่งเขียนแทนโดยสัญลักษณ์ $N(\Delta)_{\leq n}$ สามารถหาได้จากสูตร

$$N(\Delta)_{\leq n} = \frac{(n+1)(n+3)(2n+1)}{24} \quad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \tag{1}$$

$$N(\Delta)_{\leq n} = \frac{n(n+2)(2n+5)}{24} \quad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \tag{2}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาจำนวนรูปสามเหลี่ยมทั้งหมดที่มีความยาวด้านทุกด้านเป็นจำนวนเต็มและมีด้านที่ยาวที่สุดไม่เกิน 25

วิธีทำ จากสมการที่ (1) จะได้ว่า จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่ยาวที่สุดไม่เกิน 25 คือ

$$N(\Delta)_{\leq 25} = \frac{(25+1)(25+3)(2 \times 25+1)}{24} = \frac{(26)(28)(51)}{24} = 1,547 \text{ รูป}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาจำนวนรูปสามเหลี่ยมทั้งหมดที่มีความยาวด้านทุกด้านเป็นจำนวนเต็มและมีด้านที่ยาวที่สุดไม่เกิน 30

วิธีทำ จากสมการที่ (2) จะได้ว่า จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่ยาวที่สุดไม่เกิน 30 คือ

$$N(\Delta)_{\leq 30} = \frac{(30)(30+2)(2 \times 30 + 5)}{24} = \frac{(30)(32)(65)}{24} = 2,600 \text{ รูป}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาจำนวนรูปสามเหลี่ยมทั้งหมดที่มีความยาวด้านทุกด้านเป็นจำนวนเต็มและมีด้านที่ยาวที่สุดตั้งแต่ 20 ถึง 30

วิธีทำ จากสมการที่ (1) และ (2) จะได้ว่า จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่ยาวที่สุดตั้งแต่ 20 ถึง 30 คือ

$$N(\Delta)_{\leq 30} - N(\Delta)_{\leq 19} = \frac{(30)(32)(65)}{24} - \frac{(20)(22)(39)}{24} = 2,600 - 715 = 1,885 \text{ รูป}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาจำนวนรูปสามเหลี่ยมทั้งหมดที่มีความยาวด้านทุกด้านเป็นจำนวนเต็มและมีด้านที่ยาวที่สุดตั้งแต่ 25 ถึง 35

วิธีทำ จากสมการที่ (1) และ (2) จะได้ว่า จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่ยาวที่สุดตั้งแต่ 25 ถึง 35 คือ

$$N(\Delta)_{\leq 35} - N(\Delta)_{\leq 24} = \frac{(36)(38)(71)}{24} - \frac{(24)(26)(53)}{24} = 4,047 - 1,378 = 2,669 \text{ รูป}$$

เนื่องจากรูปแบบทั่วไปของความยาวด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่ยาวที่สุดไม่เกิน n จะอยู่ในรูปของ $(a, a+b, a+b+c)$ เมื่อ $a \in \{1, 2, \dots, n\}$, $b \in \{0, 1, 2, \dots, n-a\}$, $c \in \{0, 1, 2, \dots, a-1\}$ โดยที่ $a+b+c \leq n$ (Meekoed, 2011)

ดังนั้น เราจะได้ว่ารูปแบบทั่วไปของความยาวด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีด้านที่ยาวที่สุดไม่เกิน n มี 2 รูปแบบ คือ $(a, a+b, a+b)$ และ $(a, a, a+c)$

รูปแบบที่ 1 $(a, a+b, a+b)$

เมื่อ $a \in \{1\}, b \in \{1, 2, 3, \dots, n-2, n-1\}$

$a \in \{2\}, b \in \{1, 2, 3, \dots, n-3, n-2\}$

$a \in \{3\}, b \in \{1, 2, 3, \dots, n-4, n-3\}$

\vdots

$a \in \{n-2\}, b \in \{1, 2\}$

$a \in \{n-1\}, b \in \{1\}$

ดังนั้น จำนวนรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่อยู่ในรูปแบบ $(a, a+b, a+b)$ คือ $1+2+3+\dots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$

รูป

รูปแบบที่ 2 $(a, a, a+c)$

เมื่อ $a \in \{2\}, c \in \{1\}$

$a \in \{3\}, c \in \{1, 2\}$

$$a \in \{4\}, c \in \{1, 2, 3\}$$

⋮

$$a \in \{n-2\}, c \in \{1, 2\}$$

$$a \in \{n-1\}, c \in \{1\}$$

ดังนั้น จำนวนรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่อยู่ในรูปแบบ $(a, a, a+c)$ คือ

$$1+2+3+\dots+\frac{n-3}{2}+\frac{n-1}{2}+\frac{n-3}{2}+\dots+3+2+1=\left(\frac{n-1}{2}\right)+\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)=\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right) \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่}$$

$$\text{และ } 1+2+3+\dots+\frac{n-2}{2}+\frac{n-2}{2}+\dots+3+2+1=\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n}{2}\right) \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่}$$

เพราะฉะนั้นจำนวนรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีด้านที่ยาวที่สุดไม่เกิน n ซึ่งเขียนแทนโดยสัญลักษณ์ $N(\Delta_i)_{\leq n}$ คือ

$$N(\Delta_i)_{\leq n} = \frac{n(n-1)}{2} + \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right) = \frac{3n^2 - 4n + 1}{4} \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \quad (3)$$

และ
$$N(\Delta_i)_{\leq n} = \frac{n(n-1)}{2} + \left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{3n^2 - 4n}{4} \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \quad (4)$$

เนื่องจากจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีด้านที่ยาวที่สุดไม่เกิน n มีจำนวน n รูป ดังนั้น จากสมการ (1) และ (3) จะได้ว่าจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่าที่มีด้านที่ยาวที่สุดไม่เกิน n ซึ่งเขียนแทนโดยสัญลักษณ์ $N(\Delta_s)_{\leq n}$ คือ

$$N(\Delta_s)_{\leq n} = \frac{(n+1)(n+3)(2n+1)}{24} - \left(\frac{3n^2 - 4n + 1}{4}\right) - n = \frac{(n-1)(n-3)(2n-1)}{24} \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \quad (5)$$

จากสมการที่ (2) และ (4) จะได้ว่าจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่าที่มีด้านที่ยาวที่สุดไม่เกิน n คือ

$$N(\Delta_s)_{\leq n} = \frac{n(n+2)(2n+5)}{24} - \left(\frac{3n^2 - 4n}{4}\right) - n = \frac{n(n-2)(2n-5)}{24} \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \quad (6)$$

นอกจากนี้ จากสมการที่ (1) และ (2) จะได้ว่า จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ n ซึ่งเขียนแทนโดยสัญลักษณ์ $N(\Delta)_n$ คือ

$$N(\Delta)_n = \frac{(n+1)(n+3)(2n+1)}{24} - \frac{(n-1)(n-1)+2(2(n-1)+5)}{24} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \quad (7)$$

และ
$$N(\Delta)_n = \frac{n(n+2)(2n+5)}{24} - \frac{((n-1)+1)(n-1)+3(2(n-1)+1)}{24} = \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2}+1\right) \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \quad (8)$$

จากสมการที่ (3) และ (4) เราจะได้ว่า จำนวนรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ n ซึ่งเขียนแทนโดยสัญลักษณ์ $N(\Delta_i)_n$ คือ

$$N(\Delta_i)_n = \frac{3n^2 - 4n + 1}{4} - \left(\frac{3(n-1)^2 - 4(n-1)}{4} \right) = \frac{3n}{2} - \frac{3}{2} \quad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \quad (9)$$

และ
$$N(\Delta_i)_n = \frac{3n^2 - 4n}{4} - \left(\frac{3(n-1)^2 - 4(n-1) + 1}{4} \right) = \frac{3n}{2} - 2 \quad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \quad (10)$$

จากสมการที่ (5) และ (6) จะได้ว่าจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่าที่มีด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ n ซึ่งเขียนแทนโดยสัญลักษณ์ $N(\Delta_s)_n$ คือ

$$N(\Delta_s)_n = \frac{(n-1)(n-3)(2n-1)}{24} - \frac{(n-1)(n-1)-2(2(n-1)-5)}{24} = \frac{(n-1)(n-3)}{4} \quad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \quad (11)$$

และ
$$N(\Delta_s)_n = \frac{n(n-2)(2n-5)}{24} - \frac{((n-1)-1)((n-1)-3)(2(n-1)-1)}{24} = \left(\frac{n-2}{2} \right)^2 \quad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \quad (12)$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาจำนวนรูปสามเหลี่ยมทั้งหมด รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว รูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า และรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีความยาวด้านทุกด้านเป็นจำนวนเต็มและมีด้านที่ยาวที่สุดไม่เกิน 15

วิธีทำ จากสมการที่ (1) จะได้ว่า จำนวนรูปสามเหลี่ยมทั้งหมดที่มีด้านที่ยาวที่สุดไม่เกิน 15 คือ

$$N(\Delta)_{\leq 15} = \frac{(15+1)(15+3)(2 \times 15 + 1)}{24} = \frac{(16)(18)(31)}{24} = 372 \text{ รูป}$$

จากสมการที่ (3) จะได้ว่า จำนวนรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีด้านที่ยาวที่สุดไม่เกิน 15 คือ

$$N(\Delta_i)_{\leq 15} = \frac{(3)(15^2) - (4)(15) + 1}{4} = 154 \text{ รูป}$$

จากสมการที่ (5) จะได้ว่า จำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่าที่มีด้านที่ยาวที่สุดไม่เกิน 15 คือ

$$N(\Delta_s)_{\leq 15} = \frac{(15-1)(15-3)(2 \times 15 - 1)}{24} = 203 \text{ รูป}$$

และจะได้ว่า จำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีด้านที่ยาวที่สุดไม่เกิน 15 คือ 15 รูป

ตัวอย่างที่ 6 จงหาจำนวนรูปสามเหลี่ยมทั้งหมด รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว รูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า และรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีความยาวด้านทุกด้านเป็นจำนวนเต็มและมีด้านที่ยาวที่สุดไม่เกิน 20

วิธีทำ จากสมการที่ (2) จะได้ว่า จำนวนรูปสามเหลี่ยมทั้งหมดที่มีด้านที่ยาวที่สุดไม่เกิน 20 คือ

$$N(\Delta)_{\leq 20} = \frac{(20)(20+2)(2 \times 20 + 5)}{24} = \frac{(20)(22)(45)}{24} = 825 \text{ รูป}$$

จากสมการที่ (4) จะได้ว่า จำนวนรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีด้านที่ยาวที่สุดไม่เกิน 20 คือ

$$N(\Delta_i)_{\leq 20} = \frac{(3)(20^2) - (4)(20)}{4} = 280 \text{ รูป}$$

จากสมการที่ (6) จะได้ว่า จำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่าที่มีด้านที่ยาวที่สุดไม่เกิน 20 คือ

$$N(\Delta_s)_{\leq 20} = \frac{(20)(20-2)(2 \times 20 - 5)}{24} = 525 \text{ รูป}$$

และจะได้ว่า จำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีด้านที่ยาวที่สุดไม่เกิน 20 คือ 20 รูป

ตัวอย่างที่ 7 จงหาจำนวนรูปสามเหลี่ยมทั้งหมด รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว รูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า และรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีความยาวด้านทุกด้านเป็นจำนวนเต็มและมีด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ 40

วิธีทำ จากสมการที่ (8) จะได้ว่า จำนวนรูปสามเหลี่ยมทั้งหมดที่มีด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ 40 คือ

$$\left(\frac{40}{2}\right)\left(\frac{40}{2} + 1\right) = 420 \text{ รูป}$$

จากสมการที่ (10) จะได้ว่า จำนวนรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ 40 คือ

$$\frac{(3)(40)}{2} - 2 = 58 \text{ รูป}$$

จากสมการที่ (12) จะได้ว่า จำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่าที่มีด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ 40 คือ

$$\left(\frac{40-2}{2}\right)^2 = 361 \text{ รูป}$$

และจะได้ว่า จำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีด้านที่ยาวที่สุด 40 คือ 1 รูป

บรรณานุกรม

- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2552). หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐานคณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์. พิมพ์ครั้งที่ 6. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- Meekoed, N. (2011). The Number of General Triangles with Longest Side Less Than or Equal to n. *KKU Science Journal* 39(4) : 696-700.

