ว.วิทย. มข. 41(4) 899-907 (2556) KKU Sci. J. 41(4) 899-907 (2013)

ฟังก์ชันเลอช็องดร์กับการหาผลเฉลยของสมการความร้อนถ่วงน้ำหนัก

Legendre's Function and Additional Solution of a Weighted Heat Equation

ประภาส ผิวอ่อน[1]

บทคัดย่อ

ในบทความนี้ จะนำเสนอวิธีการอย่างง่ายในการหาผลเฉลยของสมการความร้อนถ่วงน้ำหนัก โดยที่วิธีการดังกล่าวนี้จะอาศัยความสัมพันธ์เวียนเกิดและสมบัติบางประการของฟังก์ชันเลอช็องดร์เท่านั้น พร้อมกันนี้ยังได้แสดงการพิสูจน์ความสัมพันธ์เวียนเกิดอีกด้วย

ABSTRACT

In the article, a new simple method for solving solution of a weight heat equation is presented. The method bases on recursive relation and some property of Legendre's function. Proof of the relation is also discussed.

คำสำคัญ: ฟังก์ชันเลอช็องดร์ สมการเลอช็องดร์ สมการความร้อนถ่วงน้ำหนัก

Keywords: Legendre's function, Legendre's equation, Weighted heat equation

[1]ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหาสารคาม จังหวัดมหาสารคาม 44150

E-mail: prapart.p@msu.ac.th

1. บทนำ

เมื่อกล่าวถึงสมการความร้อนถ่วงน้ำหนัก (weighted heat equation) ผู้อ่านหลายท่านอาจจะมีข้อกังขาในใจว่า มีสมการประเภทดังกล่าวด้วยหรือ ด้วยเหตุที่ว่าสมการประเภทดังกล่าวไม่เป็นที่รู้จักกันอย่างกว้างขวางมากนัก แต่ถ้ากล่าวถึงสมการความร้อน (heat equation) ผู้เขียนเชื่อได้แน่ว่า ผู้อ่านหลาย ๆ ท่านคงเคยได้ยินได้ฟังอยู่บ่อยครั้ง โดยเฉพาะอย่างยิ่งกลุ่มผู้อ่านในสาขาวิทยาศาสตร์ และวิศวกรรมศาสตร์ สมการความร้อนถ่วงน้ำหนักก็คือสมการความร้อนที่ปรากฏพจน์ หรือฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (weight function) ในสมการ ในกรณีที่ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักเป็นฟังก์ชันค่าคงตัว จะได้ว่า สมการความร้อนถ่วงน้ำหนักก็คือสมการความร้อนนั่นเอง ปัจจุบันการหาผลเฉลยแม่นตรง (exact solution) ของสมการความร้อนถ่วงน้ำหนักยังไม่ปรากฏวิธีการหาผลเฉลยอย่างชัดเจนและส่วนใหญ่จะเป็นการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข (numerical solution) เท่านั้น

ในบทความนี้จะนำเสนอวิธีการอย่างง่ายในการหาผลเฉลยของสมการความร้อนถ่วงน้ำหนักรูปแบบเฉพาะซึ่งสมนัยกับสมการเลอช็องดร์ วิธีการดังกล่าวนี้จะแตกต่างจากวิธีการหาผลเฉลยโดยทั่วไป ได้แก่ วิธีการลดอันดับ (method of reduction) หรือ วิธีการแปรพารามิเตอร์ (method of variation of parameter) เป็นต้น โดยที่ข้อจำกัดที่สำคัญของวิธีเหล่านี้คือมีความยุ่งยากในการหาค่าปริพันธ์ทั้งสิ้น

2. สมการเลอช็องดร์และฟังก์ชันเลอช็องดร์

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองในรูป

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+n(n+1)y=0 \ ; \quad n=0,1,2,3\ldots \qquad (1)$$

สมการดังกล่าว เรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์ของเลอช็องดร์ (Legendre’s differential equation) หรือสมการเลอช็องดร์ (Legendre’s equation) ระดับขั้น n ค้นพบโดยนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสชื่อ แอเดรียน มารีย์ เลอช็องดร์ (Adrien-Marie Legendre) (Rai et al., 2002) โดยที่สมการนี้มีผลเฉลยที่เป็นที่รู้จักกันดีในชื่อพหุนามเลอช็องดร์ (Legendre’s polynomials) หรือ ฟังก์ชันเลอช็องดร์ (Legendre’s Functions) ซึ่งสามารถคำนวณหาได้จากสูตรของ Rodrigues

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right] \ ; \ n=0,1,2,3\ldots$$

นั่นคือ

$$P_0(x)=1$$
$$P_1(x)=x$$
$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$
$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$
$$\vdots$$

นอกจากนี้ ฟังก์ชันเลอช็องดร์ ดังกล่าวข้างต้น ยังสอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิด (Strauss, 1992)

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \ ; \ n = 1,2,3\ldots \tag{2}$$

ซึ่งถือว่าเป็นหนึ่งคุณสมบัติที่สำคัญที่ช่วยให้เราคำนวณหาพหุนามเลอช็องดร์ได้อย่างรวดเร็ว เมื่อ n มีค่าเพิ่มมากขึ้น กล่าวคือ เมื่อ $n=1$ โดยสมการ (2) จะได้ว่า

$$P_2(x) = \frac{3}{2}xP_1(x) - \frac{1}{2}P_0(x)$$

เนื่องจาก $P_0(x)=1,\ P_1(x)=x$ ดังนั้น

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

เมื่อ $n=2$ โดยสมการ (2) จะได้ว่า

$$P_3(x) = \frac{5}{3}xP_2(x) - \frac{2}{3}P_1(x)$$

เนื่องจาก $P_1(x)=x,\ \ P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x$ ดังนั้น

$$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

เมื่อ $n=3$ โดยสมการ (2) จะได้ว่า

$$P_4(x) = \frac{9}{4}xP_3(x) - \frac{3}{4}P_2(x)$$

เนื่องจาก $P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x,\ \ P_3(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x$ ดังนั้น

$$P_4(x) = \frac{45}{8}x^4 - \frac{63}{8}x^2 + \frac{3}{2}$$

จากการแสดงการคำนวณข้างต้น จะเห็นว่าการคำนวณค่าพหุนามเลอช็องดร์ด้วยสมการ (2) ไม่จำเป็นต้องอาศัยการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ดังสูตรของ Rodrigues ซึ่งถือได้ว่าเป็นการช่วยประหยัดเวลา และลดภาระของผู้อ่านได้อีกทางหนึ่ง

3. สมการความร้อนถ่วงน้ำหนัก

พิจารณาสมการความร้อนถ่วงน้ำหนักในรูป

$$\frac{d}{dx}\left[w(x)\frac{dv(x)}{dx}\right] = -\lambda^2 v(x);\ \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{3}$$

โดยที่ $v(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง และ $w(x)$ คือ ค่าถ่วงน้ำหนักของสมการ

ในบทความนี้ จะพิจารณากรณีเฉพาะ เมื่อ $w(x)=1-x^2$ นั่นคือ เราจะพิจารณาสมการความร้อนถ่วงน้ำหนัก ในรูป

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dv(x)}{dx}\right]=-\lambda^2 v(x) \tag{4}$$

จากสมการข้างต้น เมื่อ $\lambda^2=n(n+1)$ เราพบว่า สมการ (4) จะเป็นสมการเลอช็องดร์ ระดับขั้น n กล่าวคือ

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dv(x)}{dx}\right]=-n(n+1)v(x) \tag{5}$$

4. การหาผลเฉลยของสมการความร้อนถ่วงน้ำหนัก

ประการต่อไปจะแสดงการหาผลเฉลยของสมการ (5)โดยวิธีการลดอันดับของสมการ (reduction of order) (Rai et al., 2002) กำหนดให้ $v_{1,n}=P_n(x)$ เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการความร้อนถ่วงน้ำหนัก (5) โดยวิธีการลดอันดับ เราจะสมมติ ผลเฉลยอื่น ๆ ของสมการ (5) อยู่ในรูป

$$v_{2,n}=q_nP_n(x) \tag{6}$$

โดยที่ $q_n=q_n(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงและ $q_n\neq 0$

เนื่องจาก $v_{2,n}=q_nP_n(x)$ เป็นผลเฉลยของ (5) ดังนั้น

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d(q_nP_n)}{dx}\right]=-n(n+1)q_nP_n$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned}
-n(n+1)q_nP_n &= \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\left(q_n\frac{dP_n}{dx}+P_n\frac{dq_n}{dx}\right)\right]\\
&= \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)q_n\frac{dP_n}{dx}+(1-x^2)P_n\frac{dq_n}{dx}\right]\\
&= \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)q_n\frac{dP_n}{dx}\right]+\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)P_n\frac{dq_n}{dx}\right]\\
&= q_n\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right]+\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right]\frac{dq_n}{dx}+\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)P_n\frac{dq_n}{dx}\right]
\end{aligned}$$

$$0=q_n\left(\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right]+n(n+1)P_n\right)+\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right]\frac{dq_n}{dx}+\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)P_n\frac{dq_n}{dx}\right] \tag{7}$$

เนื่องจาก $v_{1,n}=P_n(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการ (5) ดังนั้น สมการ (7) จะเขียนในรูป

$$\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right]\frac{dq_n}{dx}+\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)P_n\frac{dq_n}{dx}\right]=0 \tag{8}$$

ถ้าให้ $z_n=\dfrac{dq_n}{dx}$ จะได้ว่า

$$\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right]z_n+\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)P_n z_n\right]=0$$

$$\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right]z_n+z_n\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)P_n\right]+(1-x^2)P_n\frac{dz_n}{dx}=0$$

$$\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}+\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)P_n\right]\right]z_n=-(1-x^2)P_n\frac{dz_n}{dx}$$

$$\frac{1}{P_n}\frac{dP_n}{dx}+\frac{1}{[(1-x^2)P_n]}\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)P_n\right]=-\frac{1}{z_n}\frac{dz_n}{dx}$$

ทำการหาปริพันธ์ทั้งสองข้างของสมการ โดยพิจารณาให้ค่าคงตัวของการหาปริพันธ์เป็นศูนย์ จะได้ว่า

$$\ln P_n+\ln\left[(1-x^2)P_n\right]+\ln z_n=0$$

$$\ln\left[(1-x^2)(P_n)^2 z_n\right]=0$$

$$(1-x^2)(P_n)^2 z_n=1$$

$$z_n=\frac{1}{(1-x^2)(P_n)^2}$$

เนื่องจาก $z_n=\dfrac{dq_n}{dx}$ จะได้ว่า

$$\frac{dq_n}{dx}=\frac{1}{(1-x^2)(P_n)^2}$$

ดังนั้น

$$q_n=\int\frac{1}{(1-x^2)(P_n)^2}dx$$

เพราะฉะนั้น

$$v_{2,n}=P_n(x)\int\frac{1}{(1-x^2)(P_n)^2}dx \tag{9}$$

ซึ่งจะนำไปสู่การหาผลเฉลยของสมการ (5) ดังนี้

พิจารณา $n=0$ เนื่องจาก $v_{1,0}=P_0(x)=1$ จะได้ว่า

$$v_{2,0}=P_0(x)\int\frac{1}{(1-x^2)(P_0)^2}\,dx$$

$$=\int\frac{1}{(1-x^2)}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

พิจารณา $n=1$ เนื่องจาก $v_{1,1}=P_1(x)=x$ จะได้ว่า

$$v_{2,1}=P_1(x)\int\frac{1}{(1-x^2)(P_1)^2}\,dx$$

$$=x\int\frac{1}{(1-x^2)x^2}\,dx$$

$$=x\int\left[\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right]+\frac{1}{x^2}\right]dx$$

$$=x\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{x}\right]$$

$$=\frac{x}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-1$$

พิจารณา $n=2$ เนื่องจาก $v_{1,2}=P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$ จะได้ว่า

$$v_{2,2}=P_2(x)\int\frac{1}{(1-x^2)(P_2)^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}(3x^2-1)\int\frac{1}{(1-x^2)\left(\frac{1}{2}(3x^2-1)\right)^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}(3x^2-1)\int\frac{4}{(1-x^2)(3x^2-1)^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}(3x^2-1)\int\left[\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right]+\frac{3}{3x^2-1}+\frac{6}{(3x^2-1)^2}\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}(3x^2-1)\ln\sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}-\frac{3}{2}x$$

พิจารณา $n=3$ เนื่องจาก $v_{1,3}(x)=P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$ จะได้ว่า

$$v_{2,3}=P_3(x)\int\frac{1}{(1-x^2)(P_3)^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}(5x^3-3x)\int\frac{1}{(1-x^2)\left(\frac{1}{2}(5x^3-3x)\right)^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}(5x^3-3x)\ln\sqrt{\frac{|x+1|}{|x-1|}}-\frac{5}{2}x^2+\frac{2}{3}$$

โดยการดำเนินการในลักษณะเดียวกันนี้ไปเรื่อย ๆ จะทำให้ได้ผลเฉลยเพิ่มเติมอื่น ๆ ของสมการความร้อนถ่วงน้ำหนัก (5)

ประการต่อไป จะแสดงถึงวิธีการหาผลเฉลยของสมการความร้อนถ่วงน้ำหนักอีกรูปแบบหนึ่ง ถึงแม้วิธีการหาผลเฉลยโดยวิธีการลดอันดับของสมการที่อธิบายข้างต้นจะดูไม่ซับซ้อนมากนัก แต่การหาผลเฉลยโดยวิธีการดังกล่าวก็ยังมีความไม่สะดวกอยู่บ้าง เมื่อ n มีค่าเพิ่มขึ้น เนื่องจากการหาค่าปริพันธ์ในสูตร (9) ค่อนข้างมีความยุ่งยาก อย่างไรก็ตามในบทความของ Qian (Da qian, 2011) ได้พิสูจน์ทฤษฎีบทอันหนึ่ง ซึ่งอาจกล่าวได้ว่าเป็นตัวช่วยที่สำคัญที่จะทำให้การหาผลเฉลยของสมการความร้อนถ่วงน้ำหนัก มีความง่าย และสะดวกมากยิ่งขึ้น โอกาสนี้ผู้เขียนจึงจะขอยกทฤษฎีบทดังกล่าว มากล่าวถึงอีกครั้งหนึ่ง ดังนี้

ทฤษฎีบท ผลเฉลยของสมการความร้อนถ่วงน้ำหนัก (3) สอดคล้องความสัมพันธ์

$$v_{2,n+1}(x)=\frac{2n+1}{n+1}xv_{2,n}(x)-\frac{n}{n+1}v_{2,n-1}(x) \tag{10}$$

สำหรับทุกค่า $n=1,2,3,\ldots$

บทพิสูจน์ จะแสดงการพิสูจน์โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ดังนี้

กำหนดให้ $P(n)$ แทน $v_{2,n+1}(x)=\frac{2n+1}{n+1}xv_{2,n}(x)-\frac{n}{n+1}v_{2,n-1}(x),\quad n=1,2,3,\ldots$

เมื่อ $n=1$ เนื่องจาก

$$v_{2,2}(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)\ln\sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}-\frac{3}{2}x$$

$$=\frac{3}{2}x^2\sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}-\frac{1}{2}\sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}-\frac{3}{2}x$$

$$= \frac{3}{2}x\left(x\sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|} - 1 \right) - \frac{1}{2}\sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}$$

$$= \frac{3}{2}xv_{2,1}(x) - \frac{1}{2}v_{2,0}(x)$$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ให้ $P(k)$ เป็นจริง สำหรับทุกค่า $k \le n-1$ จะได้ว่า

$$v_{2,n}(x) = \frac{2n-1}{n}xv_{2,n-1}(x) - \frac{n-1}{n}v_{2,n-2}(x) \tag{11}$$

นั่นคือ $$nv_{2,n}(x) = (2n-1)xv_{2,n-1}(x) - (n-1)v_{2,n-2}(x)$$

จาก $v_{2,n} = q_n P_n(x)$ จะได้ว่า

$$nP_n(x)q_n(x) = (2n-1)xP_{n-1}(x)q_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x)q_{n-2}(x) \tag{12}$$

โดยสมการ (2) จะได้ว่า

$$nP_n(x) = (2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x) \tag{13}$$

แทนค่าสมการ (13) ลงในสมการ (12)

$$(2n-1)xP_{n-1}(x)q_n(x) - (n-1)P_{n-2}(x)q_n(x) = (2n-1)xP_{n-1}(x)q_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x)q_{n-2}(x)$$

นั่นคือ

$$(2n+1)xP_n(x)q_{n+1}(x) - nP_{n-1}(x)q_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x)q_n(x) - nP_{n-1}(x)q_{n-1}(x)$$

$$(2n+1)xP_n(x)q_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x)q_n(x) - nP_{n-1}(x)q_{n-1}(x) + nP_{n-1}(x)q_{n+1}(x) \tag{14}$$

พิจารณา

$$v_{2,n+1}(x) = P_{n+1}(x)q_{n+1}(x)$$

$$= \left[\frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x) \right] q_{n+1}(x)$$

จะได้ว่า

$$v_{2,n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x)q_{n+1}(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)q_{n+1}(x) \tag{15}$$

แทนค่า สมการ (14) ลงในสมการ (15)

$$v_{2,n+1}(x) = \frac{1}{n+1}\left[(2n+1)xP_n(x)q_n(x) - nP_{n-1}(x)q_{n-1}(x) + nP_{n-1}(x)q_{n+1}(x) \right] - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)q_{n+1}(x)$$

$$= \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) q_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x) q_{n-1}(x) + \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x) q_{n+1}(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x) q_{n+1}(x)$$

$$= \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) q_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x) q_{n-1}(x)$$

เนื่องจาก $v_{2,n}(x) = P_n(x) q_n(x)$

ดังนั้น

$$v_{2,n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x v_{2,n}(x) - \frac{n}{n+1} v_{2,n-1}(x)$$

นั่นคือ $P(n)$ เป็นจริง ❒

จากทฤษฎีบทข้างต้น จะได้ว่าผลเฉลยของสมการความร้อนถ่วงน้ำหนัก ขึ้นอยู่กับผลเฉลยก่อนหน้าสองผลเฉลยที่อยู่ติดกัน ดังนั้น เราสามารถหาผลเฉลยเพิ่มเติมอื่น ๆ ของสมการความร้อนถ่วงน้ำหนัก (3) ได้โดยง่าย โดยอาศัยความสัมพันธ์ (10) กล่าวคือ

$$v_{2,4}(x) = \frac{7}{4} x v_{2,3}(x) - \frac{3}{4} v_{2,2}(x)$$

$$= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \ln \sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|} - \frac{35}{8} x^3 + \frac{55}{24} x$$

$$v_{2,5}(x) = \frac{9}{5} x v_{2,4}(x) - \frac{4}{5} v_{2,3}(x)$$

$$= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \ln \sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|} - \frac{63}{8} x^4 + \frac{49}{8} x^2 - \frac{8}{15}$$

เป็นต้น

5.บทสรุป

บทความนี้ได้แสดงวิธีการในการหาผลเฉลยเพิ่มเติมอื่นๆของสมการความร้อนถ่วงน้ำหนักรูปแบบเฉพาะ โดยอาศัยสมบัติของฟังก์ชันเลอช็องดร์และความสัมพันธ์จากทฤษฎีบทข้างต้น ข้อได้เปรียบของวิธีการดังกล่าว คือ หลีกเลี่ยงการคำนวณค่าปริพันธ์ที่มีความยุ่งยากและซับซ้อนได้

6. เอกสารอ้างอิง

Da qian, L. (2011). Additional solutions of a weighted heat equation. Applied Mathematics Letters 24: 1950-1952.

Rai, B., Choudhury, D.P. and Freeman, H.I. (2002). A course in ordinary differential equations. India: Norasa Publishing House.

Walter, A.S. (1992). Partial Differential Equations, An introduction. Singapore: John Wiley & Sons, Inc.

❒❒❒❒❒