



การหาขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นของการส่งผ่าน
ในปัญหาการกระเจิงทางควอนตัมใน 1 มิติ

Lower Bounds on Transmission Probabilities
in One-Dimensional Quantum Scattering Problems

ไตรทศ งามปิติพันธ์^{1,2*} และ เพชรอาภา บุญเสริม³

บทคัดย่อ

กลศาสตร์ควอนตัมเป็นทฤษฎีที่ใช้อธิบายพลศาสตร์ของอนุภาคขนาดเล็ก ๆ เช่น อะตอมหรือโมเลกุล เป็นต้น ในบทความนี้สนใจศึกษากลศาสตร์ควอนตัมในส่วนที่เป็นกลศาสตร์คลื่นของเซโรดิงเงอร์ สมการศูนย์กลางของกลศาสตร์คลื่นนี้คือสมการเซโรดิงเงอร์ โดยการแก้สมการนี้ ทำให้สามารถอธิบายพลศาสตร์ของระบบทางควอนตัมได้ นอกจากนี้ยังได้ศึกษาปัญหาการกระเจิงทางควอนตัมใน 1 มิติ คำนวณหาฟังก์ชันคลื่นโดยการหาผลเฉลยแม่นยำตรงของสมการเซโรดิงเงอร์ในกรณีของพลังงานศักย์แบบฟังก์ชันเดลต้าและพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมมุมฉาก และนำฟังก์ชันคลื่นที่ได้มาคำนวณหาความน่าจะเป็นของการส่งผ่านและการสะท้อน รวมทั้งนำเสนอการหาขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นของการส่งผ่าน และนำมาประยุกต์ใช้ในปัญหาพลังงานศักย์แบบฟังก์ชันเดลต้าและพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมมุมฉาก ผลลัพธ์ที่ได้บ่งชี้ว่าความน่าจะเป็นของการส่งผ่านที่หาจากผลเฉลยแม่นยำตรงของฟังก์ชันคลื่นมีความสอดคล้องกับขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นของการส่งผ่าน

¹คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏจันทรเกษม กรุงเทพมหานคร 10900

²ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร 10330

³ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร 10330

ABSTRACT

Quantum mechanics is the theory that describes dynamics of small objects such as atom and molecule. In this paper, Schrodinger's wave mechanics, a part of quantum mechanics, is studied. The central equation of this wave mechanics is the Schrodinger's equation. Solving this equation, quantum system dynamics can be described. In this work, the quantum scattering problem in one dimension is studied. Wave functions are obtained by exactly solving the Schrodinger's equation in case of the delta function potential and the rectangular potential. The transmission and reflection probabilities are calculated from the obtained wave functions. Lower bounds on the transmission probabilities are presented. Finally, the lower bounds on the transmission probabilities are applied to the delta function potential and the rectangular potential problems. The results show that the exact transmission probabilities satisfy the lower bounds on the transmission probabilities.

คำสำคัญ: กลศาสตร์ควอนตัม สมการชเรอดิงเงอร์ ขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นของการส่งผ่าน พลังงานศักย์แบบฟังก์ชันเดลต้า พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมมุมฉาก

Keywords: Quantum mechanics, Schrodinger equation, Lower bound on the transmission probability, The delta function potential, The rectangular potential.

1. บทนำ

ในช่วงปลายศตวรรษที่ 19 ความรู้ทางฟิสิกส์ประกอบไปด้วยวิชาหลัก ๆ คือ กลศาสตร์แบบดั้งเดิม แม่เหล็กไฟฟ้า และ อุณหพลศาสตร์ กลศาสตร์แบบดั้งเดิมใช้ทำนายการเคลื่อนที่ของวัตถุตั้งแต่วัตถุนานจนกระทั่งวัตถุในเอกภพ แม่เหล็กไฟฟ้าใช้อธิบายสนามและคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า และอุณหพลศาสตร์ใช้อธิบายความร้อน งาน พลังงาน อุณหภูมิ และเครื่องยนต์ ทั้งหมดนี้รวมเรียกว่าฟิสิกส์แบบดั้งเดิม ความสำเร็จของฟิสิกส์แบบดั้งเดิมทำให้นักฟิสิกส์หลาย ๆ คนเชื่อกันว่าฟิสิกส์สามารถอธิบายปรากฏการณ์ธรรมชาติได้ทั้งหมด อย่างไรก็ตาม ในช่วงต้นศตวรรษที่ 20 ได้ค้นพบปรากฏการณ์บางอย่างที่ฟิสิกส์แบบดั้งเดิมไม่สามารถอธิบายได้ เช่น พฤติกรรมของค่าความจุความร้อนต่อโมลแบบปริมาตรคงที่ของก๊าซไฮโดรเจน เมื่ออุณหภูมิมียุคตั้งแต่ต่ำมากจนกระทั่งสูงมาก เป็นต้น ในปีค.ศ. 1905 อัลเบิร์ต ไอน์สไตน์ได้เสนอทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษและได้แสดงให้เห็นว่ากลศาสตร์แบบดั้งเดิมของนิวตันใช้ไม่ได้เมื่อความเร็วของอนุภาคสูงมาก (นั่นคือเมื่อความเร็วของอนุภาคใกล้เคียงกับความเร็วแสง) นอกจากนี้ฟิสิกส์แบบดั้งเดิมยังไม่สามารถอธิบายปรากฏการณ์ของอนุภาคขนาดเล็ก เช่น ปัญหาการแผ่รังสีของวัตถุดำ ปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริก เป็นต้น ในปีค.ศ. 1900 แม็ก พลังค์ได้นำเสนอแนวคิด **ควอนตัม** ของพลังงาน ซึ่งมีใจความว่า การแลกเปลี่ยนพลังงานระหว่างคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้ากับสสารจะเกิดขึ้นได้เมื่อพลังงานที่แลกเปลี่ยนนั้นมีค่าเป็นจำนวนเต็มคูณกับ hf เท่านั้น โดยที่ h เรียกว่าค่าคงที่ของพลังค์ และ f คือความถี่ของคลื่น และเรียกพลังงานที่ไม่ต่อเนื่องนี้ว่า **ควอนตัม** จากแนวคิดนี้ทำให้สามารถอธิบายปัญหาการแผ่รังสีของวัตถุดำได้สำเร็จ ในปี

ค.ศ. 1905 ไอน์สไตน์ได้นำแนวคิดของพลังค์มาอธิบายปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริก ไอน์สไตน์ได้เสนอว่าแสงประกอบด้วยอนุภาคเล็ก ๆ ที่เรียกว่าโฟตอน โดยที่โฟตอนแต่ละตัวมีพลังงานเท่ากับ hf ทำให้สามารถอธิบายปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริกได้สำเร็จ ในปีค.ศ. 1913 นีลส์ บอร์ ได้นำเสนอแบบจำลองอะตอมของไฮโดรเจน และอธิบายว่าการแลกเปลี่ยนพลังงานระหว่างอะตอมกับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจะเกิดขึ้นได้เมื่อพลังงานที่แลกเปลี่ยนนั้นมีค่าเป็นจำนวนเต็มคูณกับ hf เท่านั้น ทำให้เขาสามารถอธิบายการทดลองได้ อย่างไรก็ตามแนวคิดของบอร์ยังไม่มีทฤษฎีที่นำมารองรับ ในปีค.ศ. 1923 หลุยส์ เดอบรอยล์ได้นำเสนอว่าไม่เพียงแต่คลื่นที่สามารถประพฤติตัวเป็นอนุภาคได้ แต่อนุภาคก็สามารถประพฤติตัวเป็นคลื่นได้เช่นกัน ในปีค.ศ. 1925 ทฤษฎีที่เชื่อมโยงผลการทดลองเข้ากับแนวคิดของบอร์ก็ได้ถือกำเนิดขึ้น ทฤษฎีนี้เรียกว่า**กลศาสตร์ควอนตัม** ตามประวัติศาสตร์ มีผู้วางรากฐานของกลศาสตร์ควอนตัมไว้สองแนวทาง แนวทางแรกเรียกว่า**กลศาสตร์เมทริกซ์** โดยเวอร์เนอร์ ไฮเซนเบิร์กเป็นผู้ให้กำเนิดกลศาสตร์เมทริกซ์ขึ้นในปีค.ศ. 1925 ซึ่งได้แทนปริมาณทางพลศาสตร์เช่น ตำแหน่งของอนุภาค พลังงาน โมเมนตัม เป็นต้น ในรูปของเมทริกซ์ ทำให้ได้ปัญหาค่าไอเกนซึ่งสามารถอธิบายพลศาสตร์ของระบบขนาดเล็ก ๆ ได้ แนวทางที่สองเรียกว่า**กลศาสตร์คลื่น** โดยเออร์วิน ชเรอดิงเงอร์เป็นผู้ให้กำเนิดกลศาสตร์คลื่นนี้ในปีค.ศ. 1926 ซึ่งพัฒนาทฤษฎีนี้มาจากแนวคิดของเดอบรอยล์ ทฤษฎีนี้อธิบายพลศาสตร์ของอนุภาคที่มีขนาดเล็ก ๆ ด้วยคลื่นในรูปของสมการคลื่น สมการนี้เรียกว่า**สมการชเรอดิงเงอร์**ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ คำตอบของสมการนี้จะให้ค่าพลังงานของอนุภาคและฟังก์ชันคลื่นของระบบ ในปีค.ศ. 1927 แม็ก บอร์น ได้นำเสนอว่า กำลังสองของขนาดของฟังก์ชันคลื่นซึ่งเป็นคำตอบของสมการชเรอดิงเงอร์จะแสดงถึงความน่าจะเป็นที่จะพบอนุภาค ภายหลังชเรอดิงเงอร์สามารถพิสูจน์ได้ว่ากลศาสตร์เมทริกซ์ของไฮเซนเบิร์กและกลศาสตร์คลื่นของชเรอดิงเงอร์มีความสมมูลกัน (Zettili, 2009)

โดยสรุป กลศาสตร์ควอนตัมเป็นทฤษฎีที่ใช้อธิบายปรากฏการณ์ของอนุภาคขนาดเล็กที่มองไม่เห็นด้วยตาเปล่า เช่น อนุภาคในระดับโมเลกุลหรืออะตอม เป็นต้น กลศาสตร์ควอนตัมเป็นรากฐานของฟิสิกส์ของของแข็ง เลเซอร์ สารกึ่งตัวนำ ตัวนำยิ่งยวด พลาสมา นอกจากนี้ กลศาสตร์ควอนตัมยังเป็นรากฐานของเคมีและชีววิทยาด้วย

ปัญหาการกระเจิงทางควอนตัมใน 1 มิติเป็นการนำสมการชเรอดิงเงอร์มาอธิบายปัญหาการกระเจิงใน 1 มิติ การประยุกต์ใช้สมการชเรอดิงเงอร์เช่นนี้ช่วยให้สามารถเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างปรากฏการณ์แบบดั้งเดิมและแบบควอนตัมได้ ปัญหาการกระเจิงเกิดขึ้นเมื่อฟังก์ชันของอนุภาค (กลุ่มของอนุภาคที่มีมวลและความเร็วเท่ากัน) วิ่งจากบริเวณหนึ่งไปยังอีกบริเวณหนึ่งที่มีพลังงานศักย์ต่างกันโดยที่ค่าพลังงานศักย์นั้นน้อยกว่าค่าพลังงานรวมของแต่ละอนุภาค ในปรากฏการณ์แบบดั้งเดิม อนุภาคจะทะลุผ่านทั้งหมด ไม่มีอนุภาคตัวใดสะท้อนกลับมาเลย อย่างไรก็ตาม ในปรากฏการณ์แบบควอนตัม จะมีอนุภาคบางส่วนสะท้อนกลับมาได้ ถึงแม้ว่าพลังงานรวมของอนุภาคเหล่านั้นจะมากกว่าพลังงานศักย์ก็ตาม ในทางตรงกันข้าม ถ้าฟังก์ชันของอนุภาควิ่งจากบริเวณหนึ่งที่ค่าพลังงานศักย์น้อยกว่าค่าพลังงานรวมไปยังอีกบริเวณหนึ่งที่ค่าพลังงานศักย์มากกว่าค่าพลังงานรวม อนุภาคจะสะท้อนกลับทั้งหมดในกรณีของปรากฏการณ์แบบดั้งเดิม อย่างไรก็ตาม ในปรากฏการณ์แบบควอนตัม อนุภาคบางส่วนจะทะลุผ่านได้ ปรากฏการณ์เช่นนี้เรียกว่าปรากฏการณ์ชูโดโมงค์ (เพชรอาภา, 2556) การศึกษาหรือการ

ทำความเข้าใจปรากฏการณ์ทางควอนตัมในลักษณะเช่นนี้แล้วแต่เกี่ยวข้องกับค่าความน่าจะเป็นของการส่งผ่านและค่าความน่าจะเป็นของการสะท้อนทั้งสิ้น

ในปัญหาการกระเจิงทางควอนตัมใน 1 มิติ พลังงานศักย์จะมีค่าแตกต่างกันไปในแต่ละระบบ โดยในบางระบบ พลังงานศักย์มีรูปแบบไม่ซับซ้อน สามารถคำนวณหาผลเฉลยแม่นยำตรงของความน่าจะเป็นของการส่งผ่านได้อย่างไรก็ตาม ในบางระบบ พลังงานศักย์มีรูปแบบซับซ้อนมากจนกระทั่งไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นยำตรงของความน่าจะเป็นของการส่งผ่านได้ ในกรณีเช่นนี้ อาจต้องหาคำตอบเชิงตัวเลขหรือคำตอบแบบประมาณ ในกรณีที่ไม่ต้องการความแม่นยำเชิงตัวเลข Visser (1999) ได้นำเสนอการหาขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นของการส่งผ่านในปัญหาการกระเจิงทางควอนตัมใน 1 มิติ วิธีการนี้จะช่วยในการทำความเข้าใจระบบในเชิงคุณภาพได้ ในบทความนี้ จะนำวิธีการดังกล่าวมาประยุกต์ใช้กับปัญหาพลังงานศักย์แบบฟังก์ชันเดลต้าและพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมมุมฉากซึ่งมีผลเฉลยแม่นยำตรง

2. การหาฟังก์ชันคลื่นในปัญหา 1 มิติ

ในบทความนี้ เราสนใจศึกษากลศาสตร์คลื่นของชเรอดิงเงอร์ พลศาสตร์ของอนุภาคที่มีขนาดเล็ก ๆ สามารถอธิบายได้ด้วยสมการชเรอดิงเงอร์

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (2.1)$$

โดยที่ $\psi(x)$ คือฟังก์ชันคลื่น $V(x)$ คือพลังงานศักย์ E คือพลังงานรวมของอนุภาค และ m คือมวลของอนุภาค พจน์แรกอธิบายพลังงานจลน์ของอนุภาค พจน์ที่สองอธิบายพลังงานศักย์ และพจน์ที่สามอธิบายพลังงานรวมของอนุภาค เราสามารถเขียนสมการชเรอดิงเงอร์ใหม่ได้ดังนี้ (เพชรอาภา, 2556)

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)]\psi(x) = 0 \quad (2.2)$$

ในการแก้สมการเพื่อหาฟังก์ชันคลื่น เราจำเป็นต้องทราบค่าพลังงานศักย์ ในบทความนี้ได้เลือกศึกษาพลังงานศักย์แบบฟังก์ชันเดลต้าและพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมมุมฉาก

2.1 พลังงานศักย์แบบฟังก์ชันเดลต้า

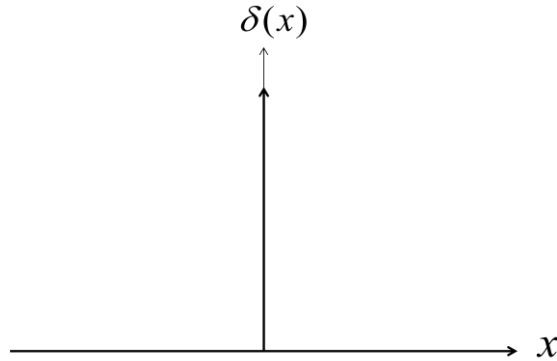
พลังงานศักย์แบบฟังก์ชันเดลต้ามีรูปแบบดังนี้

$$V(x) = \alpha\delta(x) \quad (2.3)$$

โดยที่ α คือค่าคงที่บวกและ $\delta(x)$ คือฟังก์ชันเดลต้าซึ่งนิยามโดย

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{เมื่อ } x \neq 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

กราฟของฟังก์ชันเดลต้าแสดงในรูปที่ 1



รูปที่ 1 ฟังก์ชันเดลต้า

พิจารณากรณี $E > 0$ เรานิยามปริมาณต่าง ๆ ดังนี้

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \text{ และ } k_0 = \frac{m\alpha}{\hbar^2} \tag{2.5}$$

สมการชเรอดิงเงอร์คือ

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - \alpha\delta(x)]\psi(x) = 0 \tag{2.6}$$

เมื่อ $x \neq 0$ จะได้

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2\psi(x) = 0 \tag{2.7}$$

คำตอบของสมการนี้คือ

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & \text{เมื่อ } x < 0 \\ \psi_2(x) = Ce^{ikx} & \text{เมื่อ } x > 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

ฟังก์ชันคลื่นมีความต่อเนื่องที่ $x = 0$ ดังนั้น $\psi_1(0) = \psi_2(0)$ นั่นคือ

$$A + B = C \tag{2.9}$$

เนื่องจากพลังงานศักย์มีค่าเป็นอนันต์ที่ $x = 0$ ดังนั้นอนุพันธ์ของฟังก์ชันคลื่นจึงไม่ต่อเนื่องที่จุดนี้ นั่นคือ

$$\left. \frac{d\psi(x)}{dx} \right|_{x=0^+} - \left. \frac{d\psi(x)}{dx} \right|_{x=0^-} = c \tag{2.10}$$

โดยที่ $c \neq 0$ เราสามารถหาค่า c ได้โดยการเขียนสมการ (2.6) ใหม่ดังนี้

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2\psi(x) = 2k_0\delta(x)\psi(x) \tag{2.11}$$

อินทิเกรตสมการข้างต้นทั้งสองข้างจาก $-\epsilon$ ถึง ϵ

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} dx + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} k^2\psi(x) dx = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} 2k_0\delta(x)\psi(x) dx \tag{2.12}$$

ดังนั้น

$$\frac{d\psi(x)}{dx} \Big|_{-c}^c + \int_{-c}^c k^2 \psi(x) dx = 2k_0 \psi(0) \quad (2.13)$$

ให้ $\epsilon \rightarrow 0$ จะได้

$$\frac{d\psi(x)}{dx} \Big|_{x=0^+} - \frac{d\psi(x)}{dx} \Big|_{x=0^-} = 2k_0 \psi(0) \quad (2.14)$$

แทนสมการ (2.8) ลงในสมการ (2.14) จะได้

$$ikC - ikA + ikB = 2k_0(A + B) \quad (2.15)$$

เราสามารถแก้สมการ (2.9) และสมการ (2.15) เพื่อได้ค่า B และ C ในรูปของ A

$$B = \frac{k_0 A}{ik - k_0} \quad \text{และ} \quad C = \frac{ikA}{ik - k_0} \quad (2.16)$$

ความน่าจะเป็นของการส่งผ่านและการสะท้อนมีค่าดังนี้

$$T = \left| \frac{C}{A} \right|^2 \quad \text{และ} \quad R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 \quad (2.17)$$

ดังนั้น

$$T = \frac{k^2}{k^2 + k_0^2} \quad \text{และ} \quad R = \frac{k_0^2}{k^2 + k_0^2} \quad (2.18)$$

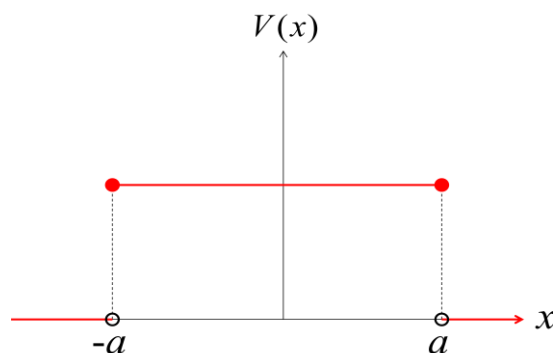
ผลลัพธ์นี้เป็นไปตามกฎอนุรักษ์ความน่าจะเป็นที่กล่าวไว้ว่า $T + R = 1$

2.2 พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมมุมฉาก

พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมมุมฉากมีรูปแบบดังนี้

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{เมื่อ } |x| \leq a \\ 0 & \text{เมื่อ } |x| > a \end{cases} \quad (2.19)$$

กราฟของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมมุมฉากแสดงในรูปที่ 2



รูปที่ 2 พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมมุมฉาก

พิจารณากรณี $E > V_0 > 0$ เรานิยามปริมาณต่าง ๆ ดังนี้

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad q^2 = \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2} \quad \text{และ} \quad k_0^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2} = k^2 - q^2 \quad (2.20)$$

สมการชเรอดิงเงอร์คือ

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)]\psi(x) = 0 \quad (2.21)$$

เมื่อ $|x| \leq a$ จะได้

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + q^2\psi(x) = 0 \quad (2.22)$$

เมื่อ $|x| > a$ จะได้

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2\psi(x) = 0 \quad (2.23)$$

คำตอบของสมการเหล่านี้คือ

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & \text{เมื่อ } x < -a \\ \psi_2(x) = Ce^{iqx} + De^{-iqx} & \text{เมื่อ } -a \leq x \leq a \\ \psi_3(x) = Ee^{ikx} & \text{เมื่อ } x > a \end{cases} \quad (2.24)$$

ฟังก์ชันคลื่นมีความต่อเนื่องที่ $x = -a$ ดังนั้น $\psi_1(-a) = \psi_2(-a)$ นั่นคือ

$$Ae^{-ika} + Be^{ika} = Ce^{-iqa} + De^{iqa} \quad (2.25)$$

ฟังก์ชันคลื่นยังมีความต่อเนื่องที่ $x = a$ ดังนั้น $\psi_2(a) = \psi_3(a)$ นั่นคือ

$$Ee^{ika} = Ce^{iqa} + De^{-iqa} \quad (2.26)$$

เนื่องจากพลังงานศักย์มีค่าอนันต์ ดังนั้นอนุพันธ์ของฟังก์ชันคลื่นมีความต่อเนื่องที่จุดเหล่านี้เช่นกัน ที่ $x = -a$ จะได้

$$Ae^{-ika} - Be^{ika} = \frac{q}{k} Ce^{-iqa} - \frac{q}{k} De^{iqa} \quad (2.27)$$

ที่ $x = a$ จะได้

$$Ee^{ika} = \frac{q}{k} Ce^{iqa} - \frac{q}{k} De^{-iqa} \quad (2.28)$$

เราสามารถแก้สมการ (2.25)-(2.28) เพื่อได้ค่า B และ E ในรูปของ A

$$\frac{B}{A} = \frac{(k^2 - q^2)(e^{2iqa} - e^{-2iqa})}{(k - q)^2 e^{2iqa} - (k + q)^2 e^{-2iqa}} e^{-2ika} \quad \text{และ} \quad \frac{E}{A} = -\frac{4kqe^{-2ika}}{(k - q)^2 e^{2iqa} - (k + q)^2 e^{-2iqa}} \quad (2.29)$$

ความน่าจะเป็นของการส่งผ่านและการสะท้อนมีค่าดังนี้

$$T = \left| \frac{E}{A} \right|^2 = \frac{4k^2 q^2}{4k^2 q^2 + k_0^4 \sin^2(2qa)} \quad \text{และ} \quad R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \frac{k_0^4 \sin^2(2qa)}{4k^2 q^2 + k_0^4 \sin^2(2qa)} \quad (2.30)$$

ผลลัพธ์นี้เป็นไปตามกฎอนุรักษ์ความน่าจะเป็นที่กล่าวไว้ว่า $T + R = 1$

สำหรับพลังงานศักย์ที่มีรูปแบบที่ซับซ้อนมากขึ้น การแก้สมการหาผลเฉลยแม่นยำตรงอาจไม่สามารถทำได้ จึงต้องอาศัยเทคนิคการประมาณมาช่วยในการหาค่าความน่าจะเป็นของการส่งผ่านและการสะท้อน เพชรอาภา (2556) ได้นำเสนอเทคนิคการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีมาช่วยในการหาค่าเหล่านั้นในกรณีที่พลังงานศักย์มีค่ามากกว่าพลังงานรวม ($V(x) > E$) ในบทความนี้จะนำเสนออีกเทคนิคหนึ่งซึ่งช่วยในการคำนวณความน่าจะเป็นของการส่งผ่านและการสะท้อนในกรณีที่พลังงานรวมมีค่ามากกว่าพลังงานศักย์ ($E > V(x)$) นั่นคือการหาขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นของการส่งผ่าน

3. การหาขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นของการส่งผ่าน

ในหัวข้อนี้ เป็นการนำเสนอเนื้อหาส่วนหนึ่งของบทความ (Visser, 1999; Boonserm and Visser, 2008; Boonserm, 2009) ซึ่งเกี่ยวกับการหาขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นของการส่งผ่าน พิจารณาสมการชเรอดิงเงอร์ใน 1 มิติ

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2(x)\psi(x) = 0 \quad (3.1)$$

โดยที่

$$k^2(x) = \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] \quad (3.2)$$

และ $V(x)$ คือพลังงานศักย์ที่เข้าสู่ค่าคงที่เมื่อ x มีค่าเป็นบวกอนันต์หรือลบอนันต์

$$V(x \rightarrow \pm\infty) \rightarrow V_{\pm\infty} \quad (3.3)$$

คำตอบของสมการ (3.1) ที่ตำแหน่งระยะอนันต์คือ

$$\psi(x \rightarrow \pm\infty) \approx \begin{cases} \alpha \frac{e^{ik_{-\infty}x}}{\sqrt{k_{-\infty}}} + \beta \frac{e^{-ik_{-\infty}x}}{\sqrt{k_{-\infty}}} & \text{เมื่อ } x \rightarrow -\infty \\ \frac{e^{ik_{\infty}x}}{\sqrt{k_{\infty}}} & \text{เมื่อ } x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3.4)$$

โดยที่

$$k_{\pm\infty} = \frac{\sqrt{2m(E - V_{\pm\infty})}}{\hbar} \quad (3.5)$$

ความน่าจะเป็นของการสะท้อนและการส่งผ่านมีค่าดังนี้คือ

$$R = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|^2 \quad \text{และ} \quad T = \left| \frac{1}{\alpha} \right|^2 \quad (3.6)$$

โดยใช้กฎการอนุรักษ์ความน่าจะเป็น ($T + R = 1$) จะได้

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \quad (3.7)$$

ที่ตำแหน่งใด ๆ ที่ไม่ใช่ระยะอนันต์ เราสมมติคำตอบในรูป

$$\psi(x) = a(x) \frac{e^{i\varphi(x)}}{\sqrt{\varphi'(x)}} + b(x) \frac{e^{-i\varphi(x)}}{\sqrt{\varphi'(x)}} \quad (3.8)$$

โดยที่ $\varphi'(x) \neq 0$ และ $\varphi(x)$ เป็นจำนวนจริง $a(x)$ และ $b(x)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน คำตอบนี้ต้องลู่อู่เข้าสู่คำตอบในสมการ (3.4) เมื่อ x มีค่าเป็นบวกอนันต์หรือลบอนันต์ นั่นคือ

$$\varphi'(x \rightarrow \pm\infty) \rightarrow k_{\pm\infty} \quad a(x \rightarrow -\infty) \rightarrow \alpha \quad a(x \rightarrow \infty) \rightarrow 1 \quad b(x \rightarrow -\infty) \rightarrow \beta \quad b(x \rightarrow \infty) \rightarrow 0 \quad (3.9)$$

ในการทำงานเดียวกัน อนุพันธ์ของฟังก์ชันคลื่นในสมการ (3.8) ต้องลู่อู่เข้าสู่อนุพันธ์ของฟังก์ชันคลื่นในสมการ (3.4) เมื่อ x มีค่าเป็นบวกอนันต์หรือลบอนันต์ ดังนั้นจึงมีเงื่อนไข

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{a(x)}{\sqrt{\varphi'(x)}} \right] e^{i\varphi(x)} + \frac{d}{dx} \left[\frac{b(x)}{\sqrt{\varphi'(x)}} \right] e^{-i\varphi(x)} = 0 \quad (3.10)$$

ดังนั้นอนุพันธ์ของฟังก์ชันคลื่นในสมการ (3.8) มีค่าดังนี้

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = i\sqrt{\varphi'(x)} \left[a(x)e^{i\varphi(x)} - b(x)e^{-i\varphi(x)} \right] \quad (3.11)$$

นำสมการ (3.11) มาคำนวณอนุพันธ์อันดับสองได้เป็น

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} &= -\frac{[\varphi'(x)]^2}{\sqrt{\varphi'(x)}} \left[a(x)e^{i\varphi(x)} + b(x)e^{-i\varphi(x)} \right] + \frac{2i\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi'(x)}} \frac{da(x)}{dx} e^{i\varphi(x)} - i \frac{\varphi''(x)}{\sqrt{\varphi'(x)}} b(x)e^{-i\varphi(x)} \\ &= -\frac{[\varphi'(x)]^2}{\sqrt{\varphi'(x)}} \left[a(x)e^{i\varphi(x)} + b(x)e^{-i\varphi(x)} \right] - \frac{2i\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi'(x)}} \frac{db(x)}{dx} e^{-i\varphi(x)} + i \frac{\varphi''(x)}{\sqrt{\varphi'(x)}} a(x)e^{i\varphi(x)} \end{aligned} \quad (3.12)$$

เปรียบเทียบกับสมการข้างต้นกับสมการ (3.1) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{da(x)}{dx} &= \frac{1}{2\varphi'(x)} \left[\varphi''(x)b(x)e^{-2i\varphi(x)} + i\{k^2(x) - \varphi'(x)^2\} \{a(x) + b(x)e^{-2i\varphi(x)}\} \right] \\ \frac{db(x)}{dx} &= \frac{1}{2\varphi'(x)} \left[\varphi''(x)a(x)e^{2i\varphi(x)} - i\{k^2(x) - \varphi'(x)^2\} \{b(x) + a(x)e^{2i\varphi(x)}\} \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

สำหรับจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ

$$\frac{d|a(x)|}{dx} = \frac{1}{2|a(x)|} \left[a^*(x) \frac{da(x)}{dx} + a(x) \frac{da^*(x)}{dx} \right] \quad (3.14)$$

จากสมการ (3.13) จะได้

$$\frac{d|a(x)|}{dx} = \frac{1}{2|a(x)|} \frac{1}{2\varphi'(x)} \left[\varphi''(x) \{a^*(x)b(x)e^{-2i\varphi(x)} + a(x)b^*(x)e^{2i\varphi(x)}\} + i \{k^2(x) - \varphi'(x)^2\} \{a^*(x)b(x)e^{-2i\varphi(x)} + a(x)b^*(x)e^{2i\varphi(x)}\} \right] \quad (3.15)$$

จัดรูปใหม่จะได้

$$\frac{d|a(x)|}{dx} = \frac{1}{2|a(x)|} \frac{1}{2\varphi'(x)} \operatorname{Re} \left(\left[\varphi''(x) + i \{k^2(x) - \varphi'(x)^2\} \right] a^*(x)b(x)e^{-2i\varphi(x)} \right) \quad (3.16)$$

จากอสมการรูปสามเหลี่ยมสำหรับจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ

$$\operatorname{Re}(AB) \leq |A| |B| \quad (3.17)$$

จะได้

$$\frac{d|a(x)|}{dx} \leq \mathcal{G}(x) |b(x)| \quad (3.18)$$

โดยที่

$$\mathcal{G}(x) = \frac{\sqrt{[\varphi''(x)]^2 + [k^2(x) - \{\varphi'(x)\}^2]^2}}{2|\varphi'(x)|} \quad (3.19)$$

เรานิยามฟังก์ชันใหม่ซึ่งมีค่าบวกเสมอดังนี้ $h(x) \equiv |\varphi'(x)|$ ดังนั้น

$$\mathcal{G}(x) = \frac{\sqrt{[h'(x)]^2 + [k^2(x) - h^2(x)]^2}}{2h(x)} \quad (3.20)$$

จากสมการ (3.7) จะได้

$$|a(x)|^2 - |b(x)|^2 = 1 \quad (3.21)$$

ดังนั้น

$$\frac{d|a(x)|}{dx} \leq \mathcal{G}(x) \sqrt{a^2(x) - 1} \quad (3.22)$$

อินทิเกรตอสมการข้างต้นจะได้

$$\left[\cosh^{-1} |a(x)| \right]_{x_i}^{x_f} \leq \int_{x_i}^{x_f} \mathcal{G}(x) dx \quad (3.23)$$

ใช้เงื่อนไขในสมการ (3.9) เมื่อ $x_i \rightarrow -\infty$ และ $x_f \rightarrow \infty$ จะได้

$$\cosh^{-1} |\alpha| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(x) dx \quad (3.24)$$

ดังนั้น

$$|\alpha| \leq \cosh \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(x) dx \right] \tag{3.25}$$

จากสมการ (3.6) เราจะได้

$$T \geq \operatorname{sech}^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(x) dx \right] \tag{3.26}$$

อินทิกรัลด้านขวามือของสมการ (3.26) คือค่าต่ำสุดที่เป็นไปได้ของค่าความน่าจะเป็นของการส่งผ่าน ดังนั้นสมการนี้จึงให้ค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นของการส่งผ่าน

4. การประยุกต์ใช้เทคนิคในการหาฟังก์ชันคลื่นในพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ

4.1 พลังงานศักย์แบบฟังก์ชันเดลต้า

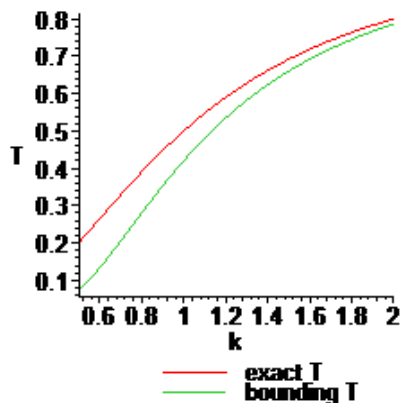
จากสมการ (3.26) ขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นของการส่งผ่านสำหรับพลังงานศักย์แบบฟังก์ชันเดลต้ามีค่า

$$T \geq \operatorname{sech}^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{[h'(x)]^2 + [k^2 - 2k_0\delta(x) - h^2(x)]^2}}{2h(x)} dx \right] \tag{4.1}$$

เลือก $h(x) = k$ ดังนั้น

$$T \geq \operatorname{sech}^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{[-2k_0\delta(x)]^2}}{2k} dx \right] = \operatorname{sech}^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|-2k_0\delta(x)|}{2k} dx \right] = \operatorname{sech}^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_0\delta(x)}{k} dx \right] = \operatorname{sech}^2 \left[\frac{k_0}{k} \right] \tag{4.2}$$

เมื่อนำผลเฉลยแม่นยำตรงที่ได้จากสมการ (2.17) มาเปรียบเทียบกับขอบเขตล่างในสมการ (4.2) นี้ ได้ผลลัพธ์ดังแสดงในรูปที่ 3



รูปที่ 3 กราฟแสดงการเปรียบเทียบความน่าจะเป็นของการส่งผ่านที่เป็นผลเฉลยแม่นยำตรงกับขอบเขตล่างในกรณีพลังงานศักย์แบบฟังก์ชันเดลต้า

กราฟนี้ได้แสดงว่าผลเฉลยแม่นยำตรง (2.17) มีค่ามากกว่าค่าขอบเขตล่างที่ปรากฏในอสมการ (4.2) นั่นคือ อสมการ (3.26) เป็นจริง นอกจากนี้ รูปที่ 3 ได้แสดงว่า ในกรณีของผลเฉลยแม่นยำตรง ความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของการส่งผ่านและค่าพลังงานของอนุภาคเหมือนกันกับในกรณีของค่าขอบเขตล่าง นั่นคือ ความน่าจะเป็นของการส่งผ่านมีค่ามากขึ้นเมื่อพลังงานของอนุภาคมีค่ามากขึ้น ดังนั้น อสมการ (4.2) สามารถใช้อธิบายคุณสมบัติเชิงคุณภาพของการกระเจิงของอนุภาคในพลังงานศักย์แบบฟังก์ชันเดลต้าได้

4.2 พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมมุมฉาก

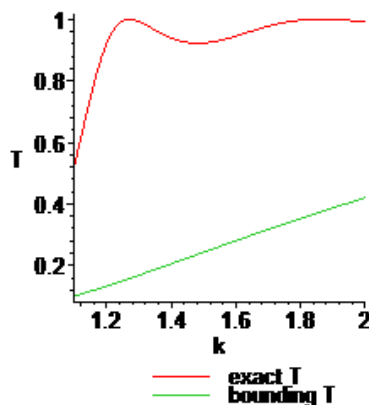
จากอสมการ (3.26) ขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นของการส่งผ่านสำหรับพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมมุมฉากมีค่า

$$T \geq \operatorname{sech}^2 \left[\int_{-\infty}^{-a} \frac{\sqrt{[h'(x)]^2 + [k^2 - h^2(x)]^2}}{2h(x)} dx + \int_{-a}^a \frac{\sqrt{[h'(x)]^2 + [q^2 - h^2(x)]^2}}{2h(x)} dx + \int_a^{\infty} \frac{\sqrt{[h'(x)]^2 + [k^2 - h^2(x)]^2}}{2h(x)} dx \right] \quad (4.3)$$

เลือก $h(x) = k$ ดังนั้น

$$T \geq \operatorname{sech}^2 \left[\int_{-a}^a \frac{\sqrt{(q^2 - k^2)^2}}{2k} dx \right] = \operatorname{sech}^2 \left[\int_{-a}^a \frac{|q^2 - k^2|}{2k} dx \right] = \operatorname{sech}^2 \left[\frac{k^2 - q^2}{2k} 2a \right] = \operatorname{sech}^2 \left[\frac{k_0^2 a}{k} \right] \quad (4.4)$$

เมื่อนำผลเฉลยแม่นยำตรงที่ได้จากสมการ (2.29) มาเปรียบเทียบกับขอบเขตล่างในอสมการ (4.4) นี้ ได้ผลลัพธ์ดังแสดงในรูปที่ 4



รูปที่ 4 กราฟแสดงการเปรียบเทียบความน่าจะเป็นของการส่งผ่านที่เป็นผลเฉลยแม่นยำตรงกับขอบเขตล่างในกรณีพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมมุมฉาก

กราฟนี้ได้แสดงว่าผลเฉลยแม่นยำตรง (2.29) มีค่ามากกว่าค่าขอบเขตล่างที่ปรากฏในอสมการ (4.4) นั่นคือ อสมการ (3.26) เป็นจริง นอกจากนี้ รูปที่ 4 ได้แสดงว่า ในกรณีของผลเฉลยแม่นยำตรง ความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของการส่งผ่านและค่าพลังงานของอนุภาคเหมือนกันกับในกรณีของค่าขอบเขตล่าง นั่นคือ ความน่าจะเป็นของการส่งผ่านมีค่ามากขึ้นเมื่อพลังงานของอนุภาคมีค่ามากขึ้น ดังนั้น อสมการ (4.4) สามารถใช้อธิบายคุณสมบัติเชิงคุณภาพของการกระเจิงของอนุภาคในพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมมุมฉากได้

5. บทสรุป

กลศาสตร์ควอนตัมสามารถใช้อธิบายปรากฏการณ์ของอนุภาคขนาดเล็ก ๆ ได้ เช่น อะตอม โมเลกุล เป็นต้น ในขณะที่ฟิสิกส์แบบดั้งเดิมไม่สามารถอธิบายได้ รากฐานของกลศาสตร์ควอนตัมมีสองแบบคือ กลศาสตร์เมทริกซ์และกลศาสตร์คลื่น ในบทความนี้ได้ศึกษากลศาสตร์คลื่นซึ่งพิจารณาว่าอนุภาคประพจน์เป็นตัวเป็นคลื่นตามสมมติฐานของเดอบรอยล์ สมการที่ใช้อธิบายคลื่นดังกล่าวคือสมการชเรอดิงเงอร์

นอกจากนี้ยังได้แสดงการหาฟังก์ชันคลื่นในปัญหา 1 มิติโดยการหาผลเฉลยแม่นยำตรงของสมการชเรอดิงเงอร์ในกรณีพลังงานศักย์แบบฟังก์ชันเดลต้าและพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมมุมฉาก และนำมาคำนวณหาความน่าจะเป็นของการส่งผ่านและการสะท้อน นอกจากนี้ยังได้นำเสนอการหาขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นของการส่งผ่านและนำมาประยุกต์ใช้ในปัญหาพลังงานศักย์แบบฟังก์ชันเดลต้าและพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมมุมฉาก พบว่าความน่าจะเป็นของการส่งผ่านที่มาจากผลเฉลยแม่นยำตรงของฟังก์ชันคลื่นมีความสอดคล้องกับขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นของการส่งผ่าน

ขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นของการส่งผ่าน สามารถนำมาใช้อธิบายคุณสมบัติเชิงคุณภาพของปรากฏการณ์การกระเจิงต่าง ๆ ในกลศาสตร์ควอนตัม โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ในปัญหาที่ไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นยำตรงได้

กิตติกรรมประกาศ

การวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยขอขอบคุณโครงการพัฒนาและส่งเสริมผู้มีความสามารถพิเศษทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (พสวท.) กองทุนรัชดาภิเษกสมโภช จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย (Sci-Super 2014-032) และสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย (สกว.) สำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา (สกอ.) และจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย (MRG5680171) ที่ให้ทุนสนับสนุนการทำวิจัยจนทำให้งานวิจัยนี้สำเร็จลุล่วงด้วยดี

เอกสารอ้างอิง

- ไตรทศ งามปิติพันธ์. (2557). ขอบเขตล่างของตัวประกอบวัตฤเทาสสำหรับหลุมดำชนิดต่าง ๆ. วิทยานิพนธ์วิทยาศาสตร์ดุสิตบัณฑิต, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. กรุงเทพมหานคร. 82 หน้า.
- นรา จิรภัทรมล. (2553). กลศาสตร์ควอนตัม. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. หน้า 19-31
- เพชรอาภา บุญเสริม. (2556). วิธีการทางคณิตศาสตร์สำหรับสมการชเรอดิงเงอร์และวิธีประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี. วารสารวิทยาศาสตร์ มข. 41(1): 109-110
- สิทธิชัย โภคยอุดม. (2552). กลศาสตร์ควอนตัมพื้นฐาน. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ. มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร. หน้า 5.71-5.76

Boonserm, P. and Visser, M. (2008). Bounding the Bogoliubov coefficients. *Annals of Physics* 323(11): 2779-2798.

Boonserm, P. (2009). Rigorous bounds on transmission reflection and Bogoliubov coefficients. Ph. D. Thesis, Victoria University of Wellington [arXiv:0907.0045 [math-ph]]. 347 pages.

Visser, M. (1999). Some general bounds for 1-D scattering. *Physical Review A* 59: 427–438.

Zettili, N. (2009). *Quantum mechanics: concepts and applications*. Second edition. West Sussex: John Wiley & Sons Ltd. pp. 1-4.

