



การพาความร้อนแบบธรรมชาติในโดเมนปิดรูปสี่เหลี่ยมพรุน ที่บรรจุแหล่งความร้อนทรงรี

Natural Convection in a Porous Square Enclosure Containing an Oval-Shaped Heat Source

ภัทรพร คำมุงคุณ¹ และ สุพจน์ ไวก์ย่างกูร^{1*}

¹ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น จังหวัดขอนแก่น 40002

*Corresponding author, E-mail: supot_wa@kku.ac.th

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ศึกษาการคำนวณเชิงตัวเลขของปัญหาการพาความร้อนแบบธรรมชาติของของไหลที่มีการไหลแบบราบเรียบ หนืดและไม่อัดตัว ที่อยู่ในสภาวะคงตัว ในโดเมนปิดรูปสี่เหลี่ยมพรุนที่บรรจุแหล่งความร้อนทรงรี โดยใช้วิธีสมาชิกจำกัด โดยมีเงื่อนไขขอบของผนังด้านข้างทั้งสี่ด้านของโดเมนสี่เหลี่ยมเป็นผนังเย็นภายในบรรจุแหล่งความร้อนทรงรีที่มีผนังร้อนและกำหนดเลขดาร์ซีโมดิฟายเรเลห์อยู่ระหว่าง 10 ถึง 10^3 และศึกษาพฤติกรรมและลักษณะการกระจายอุณหภูมิ เส้นสายธารและการกระจายความร้อน เมื่อมีเลขดาร์ซีโมดิฟายเรเลห์และขนาดของแหล่งความร้อนที่แตกต่างกัน

ABSTRACT

In this paper, we present the numerical study of natural convection in a porous square enclosure containing an oval-shaped heat source. The finite element method is used to solve this problem. The fluid properties are laminar, viscous and incompressible flow, for steady state in a porous square enclosure containing an oval-shaped heat source. The boundary conditions of the side walls for the square enclosure are cold while the oval-shaped is heated. The Darcy-modified Rayleigh number is between 10 and 10^3 . The problems studied are the behavior and distribution of isotherms, streamlines and heatlines when the value of Darcy-modified Rayleigh number and the size of the heat source are different.

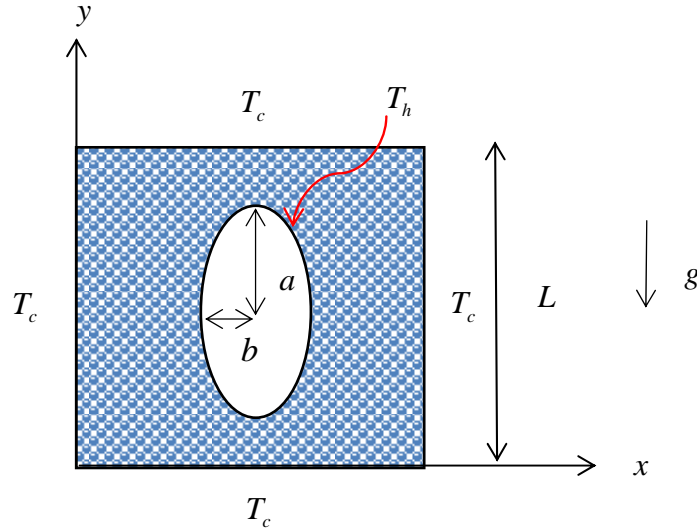
คำสำคัญ: การพาความร้อนแบบธรรมชาติ วัสดุพรุน เลขดาร์ซีโมดิฟายเรลท์

Keywords: Natural convection, Porous material, Darcy-modified Rayleigh number

บทนำ

ปัจจุบันมีการศึกษาการพาความร้อนแบบธรรมชาติกันอย่างแพร่หลาย โดยการพาความร้อนแบบธรรมชาติเป็นการถ่ายเทความร้อนอีกรูปแบบหนึ่งที่เกิดจากความแตกต่างของอุณหภูมิระหว่างของไหลกับผิวของตัวทำความร้อน การเคลื่อนที่ของของไหลเกิดจากแรงลอยตัว (Buoyancy force) ในการไหลจะไม่มีแรงภายนอกกระทำ เมื่อของไหลได้รับความร้อนและมีอุณหภูมิสูงขึ้นจะทำให้ความหนาแน่นของโมเลกุลของของไหลลดลง ทำให้ของไหลที่มีอุณหภูมิต่ำกว่าซึ่งมีความหนาแน่นของโมเลกุลของของไหลมากกว่าเคลื่อนที่มาแทนที่ทำให้ของไหลเกิดการเคลื่อนที่ และยังมีการใช้วัสดุพรุนในการทำหน้าที่เป็นอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนที่มีคุณภาพสูง เนื่องจากวัสดุพรุนเป็นของแข็งที่มีรูพรุนซึ่งของไหลสามารถไหลผ่านได้ โดยมีการนำการพาความร้อนแบบธรรมชาติในวัสดุพรุนไปใช้ประโยชน์ในแขนงต่างๆ เช่น การระบายความร้อนของอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ การสร้างระบบจัดเก็บความร้อน การออกแบบเตาเผา การออกแบบอาคาร เป็นต้น ซึ่งมีงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับปัญหาการพาความร้อนตามธรรมชาติอยู่มากมาย เช่น Saeid and Pop (2004) ศึกษาการพาความร้อนตามธรรมชาติในโดเมนปิดรูปสี่เหลี่ยมพรุน ที่มีผนังด้านบนและผนังด้านล่างเป็นฉนวน ผนังด้านซ้ายเป็นผนังร้อน และผนังด้านขวาเป็นผนังเย็น โดยใช้วิธีปริมาตรจำกัด (Finite volume method) Basak et al. (2006) ศึกษาการพาความร้อนแบบธรรมชาติในโดเมนปิดรูปสี่เหลี่ยมที่มีผนังด้านข้างทั้งสองฝั่งเป็นผนังเย็น ผนังด้านบนเป็นฉนวน และผนังด้านล่างเป็นผนังร้อน โดยใช้วิธีสมาชิกจำกัด (Finite element method) Varol and Oztop (2006) ศึกษาการพาความร้อนตามธรรมชาติในโดเมนปิดรูปสามเหลี่ยมพรุน ที่มีผนังด้านข้างเป็นฉนวน ผนังเอียงเป็นผนังเย็น และผนังด้านล่างเป็นผนังร้อน โดยใช้วิธีผลต่างจำกัด (Finite difference method) Mehdaoui et al. (2008) ได้ทำการเปรียบเทียบระหว่างโมเดลของ Darcy-Brinkman และสมการนาเวียร์สโตกโมดิฟายด์ โดยใช้วิธีสมาชิกจำกัดในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขในโดเมนสี่เหลี่ยมพรุนที่ภายในบรรจุแหล่งความร้อนทรงกลม Ghasemi et al. (2012) ศึกษาการพาความร้อนตามธรรมชาติในโดเมนทรงกลมปิดที่มีผนังเย็นบรรจุแหล่งความร้อนทรงรีที่มีผนังร้อนอยู่ภายใน และหาผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยใช้ปริมาตรควบคุมที่ขึ้นอยู่กับวิธีสมาชิกจำกัด (Control volume based finite element method) Sheikholeslami et al. (2013) ศึกษาการพาความร้อนแบบธรรมชาติในโดเมนสี่เหลี่ยมปิดที่เต็มไปด้วยของไหลนาโน Al_2O_3 ภายในบรรจุแหล่งความร้อนทรงรีโดยใช้วิธี Lattice Boltzmann ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข

ในงานวิจัยนี้ศึกษาการพาความร้อนแบบธรรมชาติในโดเมนปิดรูปสี่เหลี่ยมพรุนที่บรรจุแหล่งความร้อนทรงรีในสองมิติ ที่ผนังด้านข้างทั้งสองด้านของโดเมนสี่เหลี่ยมเป็นผนังที่มีอุณหภูมิเย็น (T_c) คงที่ และมีแหล่งความร้อนทรงรีที่ให้ความร้อน (T_h) คงที่ ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 แสดงโดเมนและขอบเขตของปัญหา

โดยผนังแต่ละด้านของโดเมนสี่เหลี่ยมมีความยาว L , แกนเอกของวงรียาว $2a$ และแกนโทของวงรียาว $2b$ ซึ่งมีค่าเยื้องศูนย์กลางของวงรี (Eccentricity, ϵ) ที่นิยามโดย

$$\epsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad \text{หรือ} \quad b = a \cdot \sqrt{1 - \epsilon^2}$$

วิธีดำเนินงานวิจัย

ในงานวิจัยนี้เป็นการศึกษาแบบจำลองเชิงตัวเลขของการไหลสำหรับปัญหาการพาความร้อนแบบธรรมชาติในโดเมนปิดรูปสี่เหลี่ยมพหุนที่บรรจุแหล่งความร้อนทรงรีใน 2 มิติ ซึ่งมีคุณสมบัติของการไหลเป็นการไหลแบบราบเรียบ หนืดและไม่อัดตัวที่อยู่ในสภาวะคงตัว โดยใช้วิธีสมาชิกจำกัดในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข ซึ่งสามารถอธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-stokes equations) ที่ประกอบด้วย สมการอนุรักษ์มวล สมการอนุรักษ์โมเมนตัม (ดาร์ซี) และสมการอนุรักษ์พลังงาน ดังนี้

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{Kg\beta}{\nu} \frac{\partial T}{\partial x} \tag{2}$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \tag{3}$$

และมีเงื่อนไขขอบ สำหรับ $0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq L$ ดังนี้

บนพื้นผิววงรี : $u = v = 0, T = T_h$

บนผนังของโดเมนสี่เหลี่ยม : $u = v = 0, T = T_c$

เมื่อ	T_h, T_c	แทน อุณหภูมิร้อนและเย็นตามลำดับ (hot and cold temperatures) (K)
	u, v	แทน ความเร็วตามแนวแกน x และแกน y ตามลำดับ (x and y component of velocities) (ms^{-1})
	K	แทน ค่าความสามารถในการซึมผ่านของตัวกลาง (Permeability) (m^2)
	β	แทน สัมประสิทธิ์การขยายตัวตามอุณหภูมิ (Thermal expansion coefficient) (K^{-1})
	g	แทน ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก (Acceleration due to gravity) (ms^{-2})
	ν	แทน ความหนืดจลน์ (Kinematic viscosity) (m^2s^{-1})
	T	แทน อุณหภูมิของของไหล (Temperatures) (K)
	α_a	แทน การแพร่ความร้อนในตัวกลางที่ซึมผ่านได้ (Thermal diffusivity) (m^2s^{-1})

ใช้เทคนิคการเปลี่ยนตัวแปรเพื่อเปลี่ยนสมการในรูปแบบที่มีมิติให้อยู่ในรูปของสมการแบบไร้มิติ โดยใช้ความสัมพันธ์ดังนี้

ฟังก์ชันสายธาร (Stream function)

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4)$$

ตัวแปรที่อยู่ในรูปไร้มิติได้แก่

$$X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L}, \quad U = \frac{uL}{\alpha_a}, \quad V = \frac{vL}{\alpha_a}, \quad \theta = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}, \quad \Psi = \frac{\psi}{\alpha_a} \quad (5)$$

$$Ra = \frac{g\beta K(T_h - T_c)L}{\nu\alpha_a}, \quad H = \frac{h}{(T_h - T_c)k}$$

เมื่อใช้ความสัมพันธ์ข้างต้น จะได้สมการ (1) - (3) อยู่ในรูปไร้มิติตดต่อไปนี้

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -Ra \frac{\partial \theta}{\partial X} \quad (7)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \quad (8)$$

และมีเงื่อนไขขอบแบบไร้มิติ สำหรับ $0 \leq X \leq 1$, $0 \leq Y \leq 1$ ดังนี้

บนพื้นผิววงรี : $U = V = 0, \theta = 1, \Psi = 0$

บนผนังของโดเมนสี่เหลี่ยม : $U = V = 0, \theta = 0, \Psi = 0$

เมื่อ U, V แทน ความเร็วแบบไร้มิติตตามแนวแกน X และแกน Y ตามลำดับ (Non-dimensional X and Y component of velocities)

Ψ แทน ฟังก์ชันสายธาร (Stream function) (m^2s^{-1})

Ψ แทน ฟังก์ชันสายธารแบบไร้มิติ (Non-dimensional stream function)

Ra แทน เลขคาร์ซีโมดิฟายเรเลห์ (Darcy-modified Rayleigh number)

θ แทน อุณหภูมิแบบไร้มิติ (Non-dimensional temperature)

สมการความร้อน (Heat equation) สำหรับปัญหาการพาความร้อนแบบธรรมชาติ ตามแนวแกน x และแกน y นิยามโดย

$$-\frac{\partial h}{\partial x} = \rho c_p v (T - T_c) - k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (9)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \rho c_p u (T - T_c) - k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (10)$$

เมื่อ h แทน ฟังก์ชันความร้อน (Heat function) ($W m^{-2} K^{-1}$)

ρ แทน ความหนาแน่น (Density) ($kg m^{-3}$)

c_p แทน ค่าจำเพาะของความร้อน (Specific heat at constant pressure) ($J kg^{-1} K^{-1}$)

k แทน ค่าคงที่การนำความร้อน (Thermal conductivity) ($W m^{-1} K^{-1}$)

เมื่อใช้ความสัมพันธ์ดังสมการ (5) จะได้สมการสำหรับฟังก์ชันความร้อนในสองมิติแบบไร้มิติเป็น

$$\frac{\partial^2 H}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial X^2} = \frac{\partial(U\theta)}{\partial Y} - \frac{\partial(V\theta)}{\partial X} \quad (11)$$

และมีเงื่อนไขขอบแบบไร้มิติ สำหรับ $0 \leq X \leq 1$, $0 \leq Y \leq 1$ ดังนี้

บนพื้นผิววงรี : $H = X$

บนผนังของโดเมนสี่เหลี่ยม : $H = 0$

เมื่อ H แทน ฟังก์ชันความร้อนแบบไร้มิติ (Non-dimensional heat function)

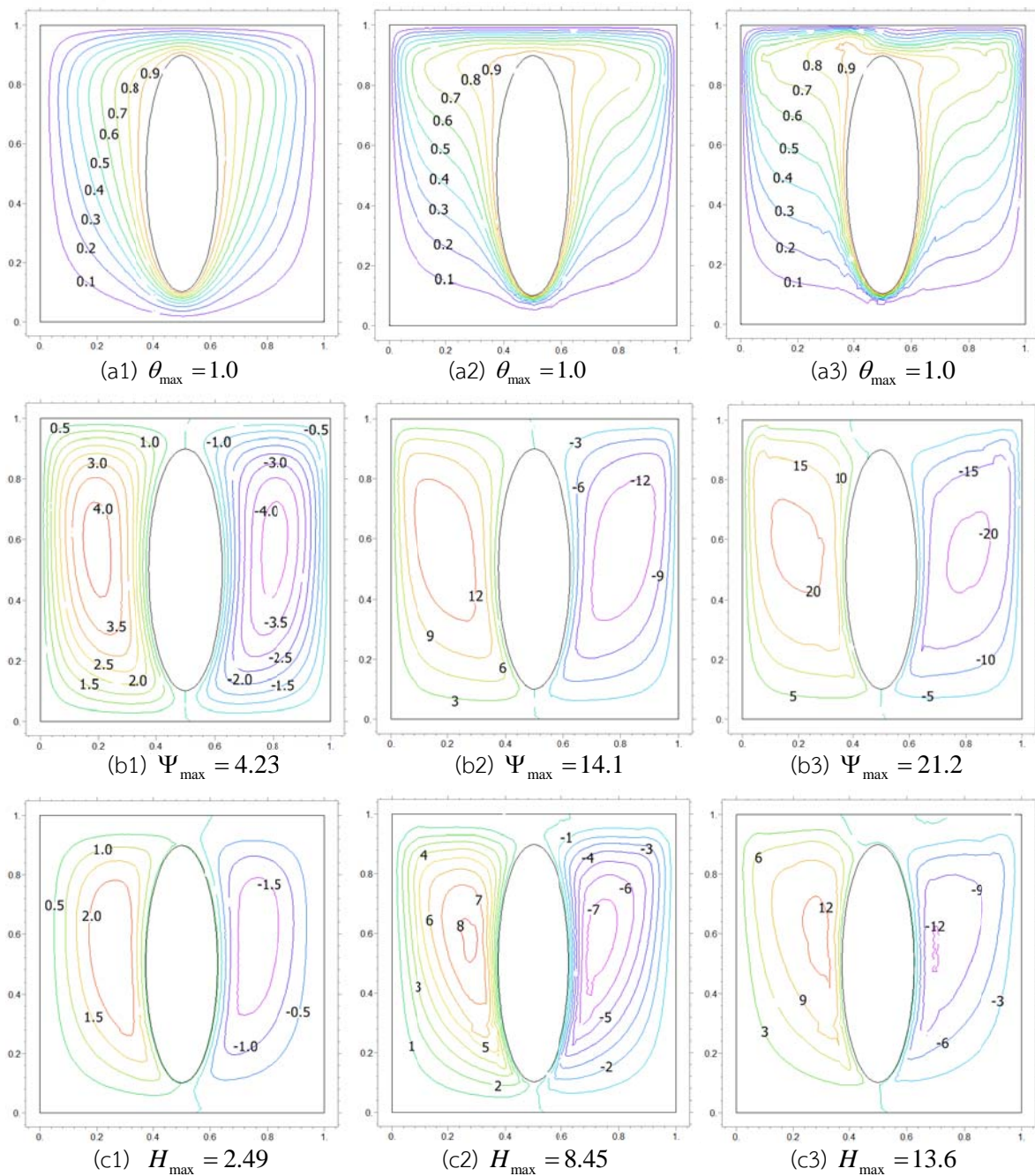
และมีสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนในเทอมของเลขนัสเซล (Nusselt number) ที่นิยามโดย

$$Nu = -\frac{\partial \theta}{\partial Y} \quad (12)$$

ผลการวิจัย

จากการศึกษาการพาความร้อนแบบธรรมชาติในโดเมนปิดรูปสี่เหลี่ยมพุนที่บรรจุแหล่งความร้อนทรงรี โดยใช้วิธีสมาชิกจำกัดและโปรแกรม FlexPDE Student version 6.32s ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข เมื่อกำหนดเลขคาร์ซีโมดิฟายเรเลห์และขนาดของแหล่งความร้อนที่แตกต่างกัน ซึ่งแบ่งเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 พิจารณาขนาดของแหล่งความร้อนที่มีขนาดเท่ากันและมีเลขคาร์ซีโมดิฟายเรเลห์ที่แตกต่างกัน เมื่อ $Ra = 10^2$, 5×10^2 , 10^3 ตามลำดับ

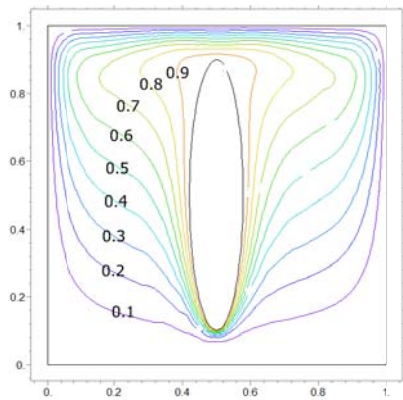
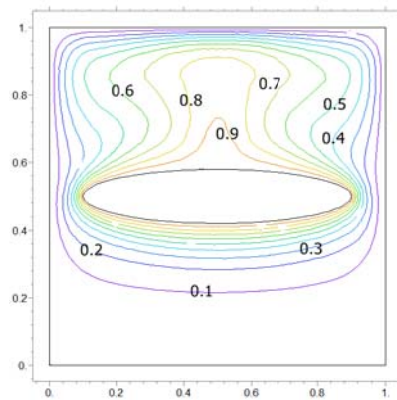
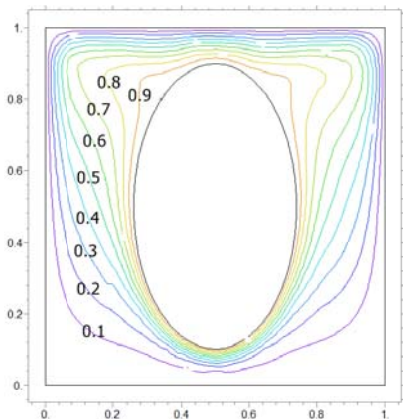
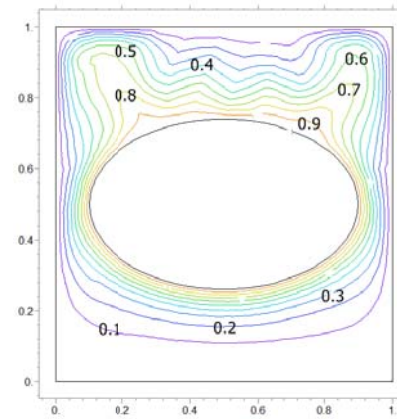


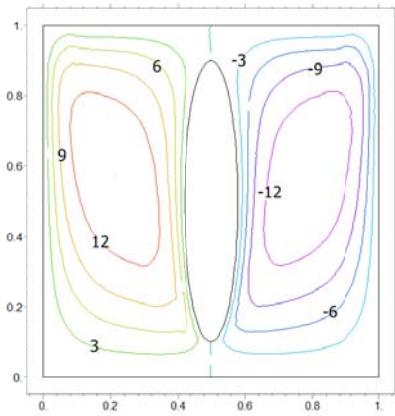
รูปที่ 2 แสดง (a) การกระจายอุณหภูมิ (b) เส้นสายธาร และ (c) การกระจายความร้อน เมื่อ $Ra = 10^2, 5 \times 10^2, 10^3$

เมื่อเลขดาร์ซีโมดิฟายเรลท์เพิ่มขึ้น พบว่ามีการกระจายอุณหภูมิ เส้นสายธารและการกระจายความร้อนเพิ่มขึ้น เนื่องจากมีแรงลอยตัวเนื่องจากอุณหภูมิเพิ่มขึ้นทำให้เกิดการกระจายอุณหภูมิเกือบทั่วทั้งโดเมน โดยเส้นกระจายอุณหภูมิกกระจายชิดผนังด้านบนและผนังด้านข้างของโดเมนมากขึ้น ดังรูป (a1) - (a3) เส้นสายธารที่แสดง

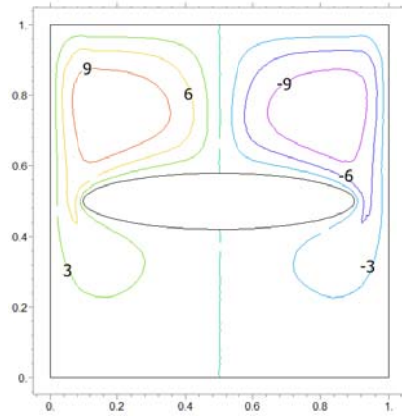
พฤติกรรมการไหล มีการไหลเป็น 2 เซลล์ ที่สมมาตรกันแต่มีเครื่องหมายต่างกันโดยเครื่องหมายบวกแสดงทิศทางการไหลในทิศทวนเข็มนาฬิกาและเครื่องหมายลบแสดงทิศทางการไหลในทิศตามเข็มนาฬิกา จะเห็นว่าเมื่อเลขดาร์ซีโมดิฟายเรเลห์เพิ่มขึ้นค่าการไหลในวงวนในสุดมีค่าเพิ่มขึ้น ดังรูป (b1) - (b3) การกระจายความร้อนมีการกระจายความร้อนเป็น 2 เซลล์ คล้ายเส้นสายธาร จะเห็นว่าเมื่อเลขดาร์ซีโมดิฟายเรเลห์เพิ่มขึ้นค่าการกระจายความร้อนในวงวนในสุดมีค่าเพิ่มขึ้นด้วย ดังรูป (c1) - (c3)

กรณีที่ 2 พิจารณาแหล่งความร้อนที่มีขนาดแตกต่างกันและมีเลขดาร์ซีโมดิฟายเรเลห์ เท่ากับ 5×10^2 เมื่อขนาดของแหล่งความร้อนอยู่ในแนวตั้งและแนวนอนที่มี a เท่ากับ 0.4 และ ε เท่ากับ 0.98, 0.8 ตามลำดับ

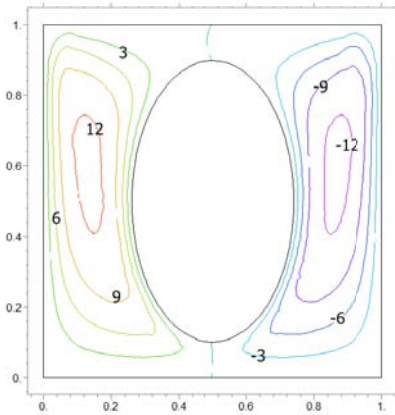
(d1) $\theta_{\max} = 1.0$ (d2) $\theta_{\max} = 1.0$ (d3) $\theta_{\max} = 1.0$ (d4) $\theta_{\max} = 1.0$



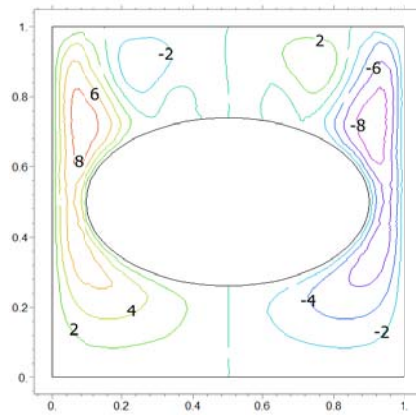
(e1) $\Psi_{\max} = 14.3$



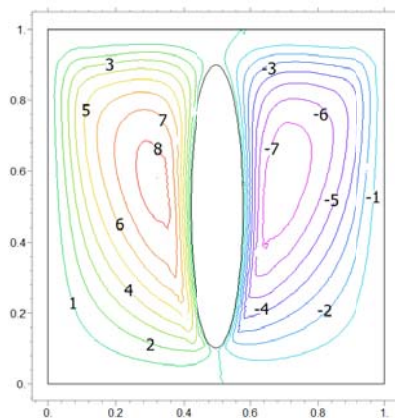
(e2) $\Psi_{\max} = 11.4$



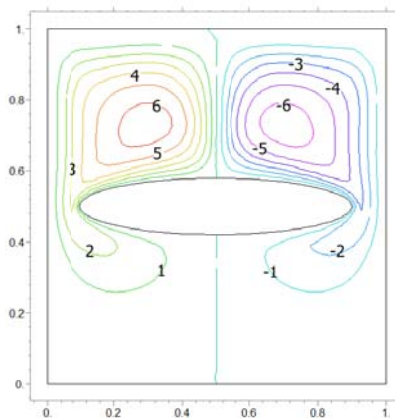
(e3) $\Psi_{\max} = 12.8$



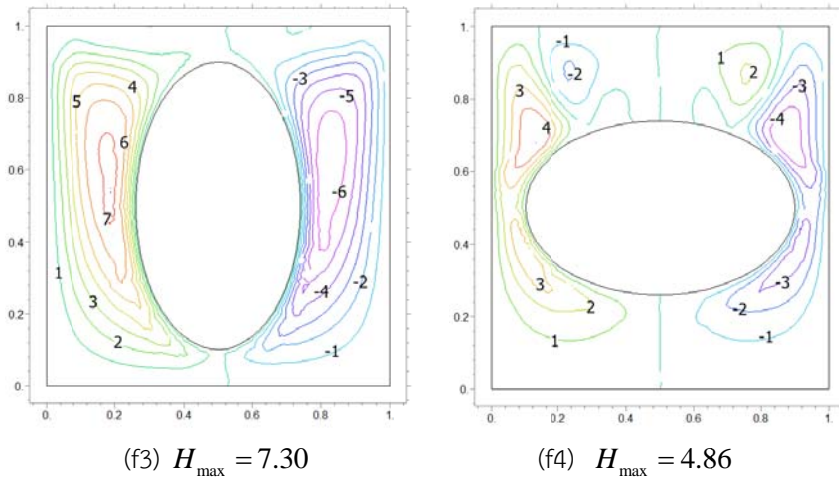
(e4) $\Psi_{\max} = 9.16$



(f1) $H_{\max} = 8.37$



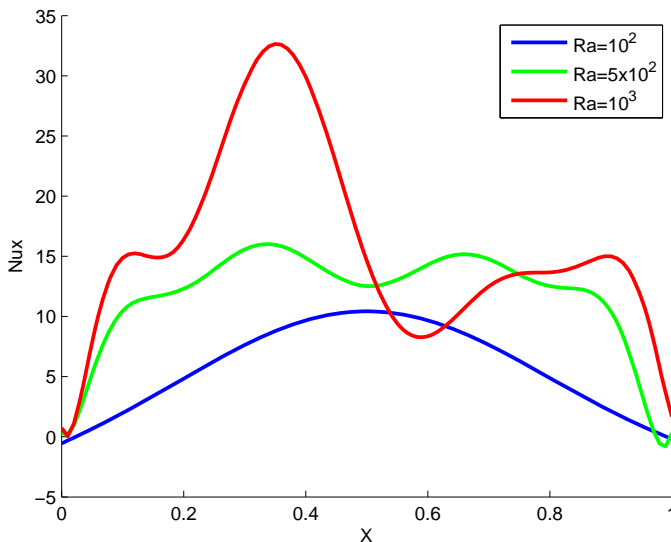
(f2) $H_{\max} = 6.47$



รูปที่ 3 แสดง (d) การกระจายอุณหภูมิ (e) เส้นสายธาร และ (f) การกระจายความร้อน เมื่อ $Ra = 5 \times 10^2$ $a = 0.4$ และ $\varepsilon = 0.98, 0.8$

เมื่อเพิ่มความกว้างของแหล่งความร้อน จะเห็นว่าเส้นกระจายอุณหภูมิกะกระจายเกือบทั่วทั้งโดเมนทั้งในแหล่งความร้อนที่อยู่ใต้วงและแนวนอน ดังรูป (d1) - (d4) ในขณะที่เส้นสายธารและการกระจายความร้อนมีค่าลดน้อยลงเมื่อแหล่งความร้อนมีขนาดกว้างขึ้น และจากรูป (d4) จะเห็นว่าเส้นกระจายอุณหภูมิกะกระจายเกือบทั่วทั้งโดเมนใกล้กับผนังด้านบนและผนังด้านข้างมากขึ้นจนถูกบีบอัดลงมายังแหล่งความร้อน ส่งผลให้เกิดเส้นสายธารและการกระจายความร้อนหลายวงวนขึ้น ดังรูป (e4) และ (f4)

เลขนัสเซล (Nusselt number)



รูปที่ 4 แสดงเลขนัสเซลที่ผนังด้านบนของโดเมนสี่เหลี่ยม เมื่อ $Ra = 10^2, 5 \times 10^2, 10^3$ ตามลำดับ

จากรูปที่ 4 แสดงผลกระทบของเลขคาร์ซีโมดิฟายเรเลห์บนเลขนัสเซลที่ผนังด้านบนของโดเมนสี่เหลี่ยม พบว่าเมื่อเลขคาร์ซีโมดิฟายเรเลห์เพิ่มขึ้นอัตราการถ่ายเทความร้อนเพิ่มขึ้นด้วย โดยที่ $Ra = 10^2$ อัตราถ่ายเทความร้อนเป็นกราฟรูปพาราโบลาคว่ำที่มีจุดสูงสุดอยู่ที่จุด $X = 0.5$ เมื่อเพิ่มเลขคาร์ซีโมดิฟายเรเลห์เป็น $Ra = 5 \times 10^2$ และ $Ra = 10^3$ เห็นได้ว่าอัตราการถ่ายเทความร้อนเป็นกราฟที่มีจุดยอดหลายจุดซึ่งจุดสูงสุดอยู่ในช่วง $0.3 < X < 0.4$ โดยลักษณะทางกายภาพของพฤติกรรมนี้ คือ ถ้าฟังก์ชันสายธารมีค่าสูง (อัตราการไหลสูง) ส่งผลให้มีการถ่ายเทความร้อนที่ผนังด้านบนเพิ่มขึ้นดังแสดงในรูปที่ 4

สรุปผลการวิจัย

จากการศึกษาพฤติกรรมและลักษณะการกระจายอุณหภูมิ เส้นสายธาร และการกระจายความร้อน สำหรับปัญหาการพาความร้อนแบบธรรมชาติในโดเมนปิดรูปสี่เหลี่ยมพรมที่บรรจุแหล่งความร้อนทรงรี เมื่อมีเลขคาร์ซีโมดิฟายเรเลห์และขนาดของแหล่งความร้อนที่แตกต่างกัน สามารถสรุปได้ว่า

1. เมื่อเลขคาร์ซีโมดิฟายเรเลห์เพิ่มขึ้น การกระจายอุณหภูมิ เส้นสายธาร และการกระจายความร้อนเพิ่มขึ้น
2. เมื่อเลขคาร์ซีโมดิฟายเรเลห์เท่ากัน ขนาดแหล่งความร้อนที่เพิ่มขึ้นส่งผลต่อการกระจายอุณหภูมิ เส้นสายธาร และการกระจายความร้อนเป็นอย่างมาก โดยแหล่งความร้อนที่อยู่ในแนวตั้งและแนวนอนที่มีขนาดเพิ่มขึ้นจะทำให้ค่าของเส้นสายธารและการกระจายความร้อนลดน้อยลง

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนได้รับทุนอุดหนุนจาก มูลนิธิศาสตราจารย์ ดร.แถบ นีละนิธิ ประจำปีการศึกษา 2557

เอกสารอ้างอิง

- Basak, T. Roy, S. and Balakrishnan, A. R. (2006). Effects of thermal boundary conditions on natural convection flows within a square cavity. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 49: 4525-4535.
- Ghasemi, E. Soleimani, S. and Bararnia, H. (2012). Natural convection between a circular enclosure and an elliptic cylinder using Control Volume based Finite Element Method. *International Communications in Heat and Mass Transfer*. 39: 1035-1044.
- Mehdaoui, R. Elmir, M. Draoui, B. and Imine O. (2008). Comparative Study between the Darcy-Brinkman Model and the Modified Navier-Stokes Equations in the Case of Natural Convection in a Porous Cavity. *Leonardo Journal of Sciences*. 12: 121-134.
- Saeid, N. H. and Pop, I. (2004). Transient free convection in a square cavity filled with a porous medium. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 47: 1917-1924.
- Sheikholeslami, M. Gorji-Bandpy, M. and Ganji, D. D. (2013). Numerical investigation of MHD effects on Al_2O_3 /water nanofluid flow and heat transfer in a semi-annulus enclosure using LBM. *Energy*. 60: 501-510.
- Varol, Y. Oztop, H. F. and Varol, A. (2006). Free convection in porous media filled right-angle triangular enclosures. *International Communications in Heat and Mass Transfer*. 33: 1190-1197.

