ว.วิทย. มข. 50(2) 136-145 (2565) KKU Sci. J. 50(2) 136-145 (2022)

# สูตรสำหรับการหาจำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านเป็นจำนวนเต็ม

# Formula for Finding the Number of Triangles with Integer Side Lengths

นิรุต มีเกิด[1*] อำภาพร คณะแพง[1] ชนากานต์ พรมอินทร์[1] ขวัญวิภา นิลจันทร์[1] และ พุฒิธร พุฒฤทธิ์[1]

Niroot Meekoed[1*], Amphaphon Khanaphaeng[1], Chanakan Promin[1],
Kwanwipha Ninchun[1], and Phuttithorn Putrit[1]

[1]โรงเรียนบ้านไร่พิทยาคม อำเภอศรีสำโรง จังหวัดสุโขทัย 64120

[1]Banrai Pittayakhom School, Si Samrong District, Sukhothai Province, 64120, Thailand

[*]Corresponding Author, Email: nirootko@gmail.com

Received: 7 November 2021 | Revised: 25 February 2022 | Accepted: 25 July 2022

## บทคัดย่อ

ในบทความนี้เราได้สร้างสูตรสำหรับการหาจำนวนสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านเป็นจำนวนเต็มที่กำหนดขอบเขตของความยาวแต่ละด้าน

## ABSTRACT

In this paper, we establish the formula for finding the number of triangles with integer side lengths that have given the boundary of each side length.

**คำสำคัญ:** อสมการอิงรูปสามเหลี่ยม จำนวนรูปสามเหลี่ยม

**Keywords**: triangle inequality, number of triangles

## บทนำ

รูปสามเหลี่ยมเป็นหนึ่งในรูปร่างพื้นฐานในเรขาคณิตซึ่งมีสมบัติที่สำคัญหลายประการ ผลจากการศึกษาเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมก่อให้เกิดแนวคิดและความรู้ต่างๆ มากมาย เช่น ความคล้าย ฟังก์ชันตรีโกณมิติ รวมทั้งทฤษฎีบทที่สำคัญ เช่น ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

มีนักวิจัยหลายท่านได้ศึกษาเกี่ยวกับจำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านเป็นจำนวนเต็ม เช่น Nicholas and Bennet (1998) และ Hirschhorn (2000) ได้ศึกษาเกี่ยวกับจำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านเป็นจำนวนเต็มเมื่อกำหนดเส้นรอบรูปมาให้ East and Niles (2019) ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับจำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านเป็นจำนวนเต็มเมื่อกำหนดเส้นรอบรูปมาให้โดยใช้ทฤษฎีกรุป

ในบทความนี้จะศึกษาเกี่ยวกับจำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านเป็นจำนวนเต็มเมื่อกำหนดความยาวด้านมาให้บางด้าน โดยจะใช้สมบัติพื้นฐานของรูปสามเหลี่ยมที่เรียกว่าอสมการอิงรูปสามเหลี่ยม คือ ผลบวกของความยาวของสองด้านใด ๆ ของรูปสามเหลี่ยมต้องมากกว่าความยาวของด้านที่เหลือเสมอมาช่วยในการหาจำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านเป็นจำนวนเต็ม

## ผลการศึกษาจำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านเป็นจำนวนเต็ม

ให้ a, b, c เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ โดยที่ $a \le b \le c$ กำหนดให้ (a, b, c) แทนความยาวแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม จากอสมการอิงรูปสามเหลี่ยมจะได้ว่า $a + b > c$ , $a + c > b$ และ $b + c > a$ จากการศึกษาพบว่ารูปแบบของความยาวด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านเป็นจำนวนเต็มเป็นดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 แสดงรูปแบบของความยาวด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านเป็นจำนวนเต็ม

| ด้านที่ยาวที่สุด (c) | ความยาวด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม (a, b, c) |
|---|---|
| 1 | (1, 1, 1) |
| 2 | (1, 2, 2), (2, 2, 2) |
| 3 | (1, 3, 3), (2, 2, 3), (2, 3, 3), (3, 3, 3) |
| 4 | (1, 4, 4), (2, 3, 4), (2, 4, 4), (3, 3, 4), (3, 4, 4), (4, 4, 4) |
| 5 | (1, 5, 5), (2, 4, 5), (2, 5, 5), (3, 3, 5), (3, 4, 5), (3, 5, 5), (4, 4, 5), (4, 5, 5), (5, 5, 5) |
| ⋮ | |
| n | (1, n, n), (2, n − 1, n), (2, n, n), (3, n − 2, n), (3, n − 1, n), (3, n, n), … , (n, n, n) |

จากตารางที่ 1 จะเห็นว่า จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านเป็นจำนวนเต็มและมีด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ n จะมีทั้งหมด n ชุด คือ ชุดที่มีด้านที่สั้นที่สุดเท่ากับ 1 ชุดที่มีด้านที่สั้นที่สุดเท่ากับ 2 ชุดที่มีด้านที่สั้นที่สุดเท่ากับ 3 … ชุดที่มีด้านที่สั้นที่สุดเท่ากับ n และเมื่อนำจำนวนรูปสามเหลี่ยมในแต่ละชุดมาเรียงต่อกันจะได้จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ n ดังนี้

ตารางที่ 2 แสดงจำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านเป็นจำนวนเต็มและมีด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ n

| ด้านที่ยาวที่สุด (c) | จำนวนรูปสามเหลี่ยมของชุดที่มีด้านที่สั้นที่สุดเป็น 1, 2, 3, … , n | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **a = 1** | **a = 2** | **a = 3** | **a = 4** | **a = 5** | | | | | **a = n−1** | **a = n** |
| 1 | 1 | | | | | | | | | | |
| 2 | 1 | 1 | | | | | | | | | |
| 3 | 1 | 2 | 1 | | | | | | | | |
| 4 | 1 | 2 | 2 | 1 | | | | | | | |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | | | | | | |
| 6 | 1 | 2 | 3 | 3 | 2 | | | | | | 1 |
| 7 | 1 | 2 | 3 | 4 | 3 | | | | | 2 | 1 |
| ⋮ | | | | | | | | | | | |
| n = คี่ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\frac{n+1}{2}-1$ | $\frac{n+1}{2}$ | | $\frac{n+1}{2}-1$ | 2 | 1 |
| n = คู่ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\frac{n}{2}-1$ | $\frac{n}{2}$ | $\frac{n}{2}$ | $\frac{n}{2}-1$ | 2 | 1 |

ต่อไปนี้ เราจะกำหนดให้ $\mathbb{N}$, O และ E แทน เซตของจำนวนนับ เซตของจำนวนคี่ และเซตของจำนวนคู่ ตามลำดับ

**ทฤษฎีบท 1** ให้ $c \in \mathbb{N}$ และ $N(x, x, c)$ แทน จำนวนชุดของรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ c

แล้ว $N(x,x,c) = \begin{cases} \dfrac{c^2+2c+1}{4} & , \quad c \in O \\ \dfrac{c^2+2c}{4} & , \quad c \in E \end{cases}$

**บทพิสูจน์** **กรณีที่ 1** $c \in O$

จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ c จะมี c ชุด คือ

ชุดที่มีด้านที่สั้นที่สุดเป็น 1, 2, 3, ... , c − 1, c

เมื่อเราพิจารณาจำนวนรูปสามเหลี่ยมในแต่ละชุด พบว่า

ชุดที่มีด้านที่สั้นที่สุดเป็น 1 ได้แก่ (1, c, c) ซึ่งมี 1 รูป

ชุดที่มีด้านที่สั้นที่สุดเป็น 2 ได้แก่ (2, c − 1, c) , (2, c, c) ซึ่งมี 2 รูป

ชุดที่มีด้านที่สั้นที่สุดเป็น 3 ได้แก่ (3, c − 2, c) , (3, c − 1, c) , (3, c, c) ซึ่งมี 3 รูป

$\vdots$

ชุดที่มีด้านที่สั้นที่สุดเป็น $\frac{c+1}{2}-1$ มี $c-[\frac{c+1}{2}-1]+1 = \frac{c+1}{2}+1$

แต่เนื่องจาก $(\frac{c+1}{2}-1, \frac{c+1}{2}-1, c)$, $(\frac{c+1}{2}-1, \frac{c+1}{2}, c)$ ไม่สามารถประกอบกันเป็นรูปสามเหลี่ยมได้

ดังนั้นชุดที่มีด้านที่สั้นที่สุดเป็น $\frac{c+1}{2}-1$ มี $\frac{c+1}{2}+1-2 = \frac{c+1}{2}-1 = \frac{c-1}{2}$ รูป

ชุดที่มีด้านที่สั้นที่สุดเป็น $\frac{c+1}{2}$ มี $c-[\frac{c+1}{2}]+1 = \frac{c+1}{2}$ รูป

ชุดที่มีด้านที่สั้นที่สุดเป็น $\frac{c+1}{2}+1$ มี $c-[\frac{c+1}{2}+1]+1 = \frac{c+1}{2}-1 = \frac{c-1}{2}$ รูป

$\vdots$

ชุดที่มีด้านที่สั้นที่สุดเป็น c − 1 มี c − (c − 1) + 1 = 2 รูป

ชุดที่มีด้านที่สั้นที่สุดเป็น c มี c − c + 1 = 1 รูป

ดังนั้นจำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ c คือ

$$1+2+3+\ldots+\frac{c-1}{2}+\frac{c+1}{2}+\frac{c-1}{2}+\ldots+3+2+1 = 2\left(1+2+3+\ldots+\frac{c-1}{2}\right)+\frac{c+1}{2}$$

$$= \left(\frac{c-1}{2}\right)\left(\frac{c+1}{2}\right)+\frac{c+1}{2}$$

$$= \frac{c^2+2c+1}{4}$$ เมื่อ c เป็นจำนวนคี่

**กรณีที่ 2** $c \in E$

ชุดที่มีด้านที่สั้นที่สุดเป็น 1 ได้แก่ (1, c, c) ซึ่งมี 1 รูป

ชุดที่มีด้านที่สั้นที่สุดเป็น 2 ได้แก่ (2, c − 1, c) , (2, c, c) ซึ่งมี 2 รูป

ชุดที่มีด้านที่สั้นที่สุดเป็น 3 ได้แก่ (3, c − 2, c) , (3, c − 1, c) , (3, c, c) ซึ่งมี 3 รูป

$\vdots$

ชุดที่มีด้านที่สั้นที่สุดเป็น $\frac{c}{2}-1$ มี $c-[\frac{c}{2}-1]+1 = \frac{c}{2}+2$

แต่เนื่องจาก $(\frac{c}{2}-1, \frac{c}{2}-1, c), (\frac{c}{2}-1, \frac{c}{2}, c), (\frac{c}{2}-1, \frac{c}{2}+1, c)$

ไม่สามารถประกอบกันเป็นรูปสามเหลี่ยมได้

ดังนั้นชุดที่มีด้านที่สั้นที่สุดเป็น $\frac{c}{2}-1$ มี $\frac{c}{2}+2-3=\frac{c}{2}-1$ รูป

ชุดที่มีด้านที่สั้นที่สุดเป็น $\frac{c}{2}$ มี $c-[\frac{c}{2}]+1 = \frac{c}{2}+1$

แต่เนื่องจาก $(\frac{c}{2}, \frac{c}{2}, c)$ ไม่สามารถประกอบกันเป็นรูปสามเหลี่ยมได้

ดังนั้นชุดที่มีด้านที่สั้นที่สุดเป็น $\frac{c}{2}$ มี $\frac{c}{2}+1-1=\frac{c}{2}$ รูป

ชุดที่มีด้านที่สั้นที่สุดเป็น $\frac{c}{2}+1$ มี $c-[\frac{c}{2}+1]+1 = \frac{c}{2}$ รูป

ชุดที่มีด้านที่สั้นที่สุดเป็น $\frac{c}{2}+2$ มี $c-[\frac{c}{2}+2]+1 = \frac{c}{2}-1$ รูป

$\vdots$

ชุดที่มีด้านที่สั้นที่สุดเป็น $c-1$ มี $c-(c-1)+1 = 2$ รูป

ชุดที่มีด้านที่สั้นที่สุดเป็น $c$ มี $c-c+1 = 1$ รูป

ดังนั้นจำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ $c$ คือ

$$
\begin{aligned}
1+2+3+\ldots+\frac{c}{2}-1+\frac{c}{2}+\frac{c}{2}+\frac{c}{2}-1+\ldots+3+2+1 &= 2\left(1+2+3+\ldots+\frac{c}{2}\right) \\
&= \frac{c}{2}(\frac{c}{2}+1) \\
&= \frac{c^2+2c}{4} \qquad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นจำนวนคู่}
\end{aligned}
$$

นั่นคือ
$$
N(x,x,c)=\begin{cases} \dfrac{c^2+2c+1}{4} & , \quad c\in O \\[2ex] \dfrac{c^2+2c}{4} & , \quad c\in E \end{cases}
$$

**ทฤษฎีบท 2** ให้ $c\in\mathbb{N}$ และ $\sum_{i=1}^{c} N(x,x,i)$ แทน จำนวนชุดของรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่ยาวที่สุดไม่เกิน $c$

แล้ว
$$
\sum_{i=1}^{c} N(x,x,i)=\begin{cases} \dfrac{2c^3+9c^2+10c+3}{24} & , \quad c\in O \\[2ex] \dfrac{2c^3+9c^2+10c}{24} & , \quad c\in E \end{cases}
$$

**บทพิสูจน์** **กรณีที่ 1** $c\in O$

จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ 1 คือ $\frac{1^2+2(1)+1}{4}=1 = (1)(1)$

จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ 2 คือ $\frac{2^2+2(2)}{4}=2 = (1)(2)$

จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ 3 คือ $\frac{3^2+2(3)+1}{4}=4 = (2)(2)$

$\vdots$

จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ c – 2

คือ $\frac{(c-2)^2+2(c-2)+1}{4}=\frac{c^2-4c+4+2c-4+1}{4}=\frac{c^2-2c+1}{4}=\left(\frac{c-1}{2}\right)\left(\frac{c-1}{2}\right)$

จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ c – 1

คือ $\frac{(c-1)^2+2(c-1)}{4}=\frac{c^2-2c+1+2c-2}{4}=\frac{c^2-1}{4}=\left(\frac{c-1}{2}\right)\left(\frac{c+1}{2}\right)$

จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ c

คือ $\frac{c^2+2c+1}{4}=\left(\frac{c+1}{2}\right)\left(\frac{c+1}{2}\right)$

ดังนั้นจำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านเป็นจำนวนเต็มและมีด้านที่ยาวที่สุดไม่เกิน c

คือ $(1)(1)+(1)(2)+(2)(2)+\ldots+\left(\frac{c-1}{2}\right)\left(\frac{c-1}{2}\right)+\left(\frac{c-1}{2}\right)\left(\frac{c+1}{2}\right)+\left(\frac{c+1}{2}\right)\left(\frac{c+1}{2}\right)$

จาก $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ และ $(1)(2)+(2)(3)+\ldots+(n)(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

จะได้ $(1)(1)+(1)(2)+(2)(2)+\ldots+\left(\frac{c-1}{2}\right)\left(\frac{c-1}{2}\right)+\left(\frac{c-1}{2}\right)\left(\frac{c+1}{2}\right)+\left(\frac{c+1}{2}\right)\left(\frac{c+1}{2}\right)$

$$=[1^2+2^2+\ldots+\left(\frac{c+1}{2}\right)^2]+[(1)(2)+(2)(3)+\ldots+(\frac{c-1}{2})(\frac{c+1}{2})]$$

$$=\frac{\left(\frac{c+1}{2}\right)(\frac{c+1}{2}+1)(c+1+1)}{6}+\frac{\left(\frac{c-1}{2}\right)(\frac{c+1}{2})(\frac{c+1}{2}+1)}{3}$$

$$=\frac{2c^3+9c^2+10c+3}{24}$$

**กรณีที่ 2** $c\in E$

จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ 1 คือ $\frac{1^2+2(1)+1}{4}=1=(1)(1)$

จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ 2 คือ $\frac{2^2+2(2)}{4}=2=(1)(2)$

จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ 3 คือ $\frac{3^2+2(3)+1}{4}=4=(2)(2)$

$\vdots$

จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ c – 2

คือ $\frac{(c-2)^2+2(c-2)}{4}=\frac{c^2-4c+4+2c-4}{4}=\frac{c^2-2c}{4}=\left(\frac{c}{2}-1\right)\left(\frac{c}{2}\right)$

จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ c – 1

คือ $\frac{(c-1)^2+2(c-1)+1}{4}=\frac{c^2-2c+1+2c-2+1}{4}=\frac{c^2}{4}=\left(\frac{c}{2}\right)\left(\frac{c}{2}\right)$

จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ c

คือ $\frac{c^2+2c}{4}=\left(\frac{c}{2}\right)\left(\frac{c}{2}+1\right)$

ดังนั้นจำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านเป็นจำนวนเต็มและมีด้านที่ยาวที่สุดไม่เกิน c

คือ $(1)(1)+(1)(2)+(2)(2)+\ldots+\left(\frac{c}{2}-1\right)\left(\frac{c}{2}\right)+\left(\frac{c}{2}\right)\left(\frac{c}{2}\right)+\left(\frac{c}{2}\right)\left(\frac{c}{2}+1\right)$

จาก $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ และ $(1)(2)+(2)(3)+\ldots+(n)(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

จะได้ $(1)(1)+(1)(2)+(2)(2)+\ldots+\left(\frac{c}{2}-1\right)\left(\frac{c}{2}\right)+\left(\frac{c}{2}\right)\left(\frac{c}{2}\right)+\left(\frac{c}{2}\right)\left(\frac{c}{2}+1\right)$

$$= [1^2+2^2+\ldots+\left(\frac{c}{2}\right)^2]+[(1)(2)+(2)(3)+\ldots+(\frac{c}{2})(\frac{c}{2}+1)]$$

$$= \frac{\left(\frac{c}{2}\right)(\frac{c}{2}+1)(c+1)}{6}+\frac{\left(\frac{c}{2}\right)(\frac{c}{2}+1)(\frac{c}{2}+2)}{3}$$

$$= \frac{2c^3+9c^2+10c}{24}$$

นั่นคือ
$$\sum_{i=1}^{c} N(x,x,i)=\begin{cases}\dfrac{2c^3+9c^2+10c+3}{24}, & c\in O\\[2ex] \dfrac{2c^3+9c^2+10c}{24}, & c\in E\end{cases}$$

**ทฤษฎีบท 3** ให้ $b\in\mathbb{N}$ และ $N(x,b,x)$ แทน จำนวนชุดของรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่ยาวปานกลางเท่ากับ b แล้ว $N(x,b,x)=\frac{b(b+1)}{2}$

**บทพิสูจน์** ให้ b เป็นด้านที่ยาวปานกลาง จะได้รูปแบบของสามเหลี่ยม คือ

(1, b, b) ซึ่งมี 1 รูป

(2, b, b) , (2, b, b + 1) ซึ่งมี 2 รูป

(3, b, b) , (3, b, b + 1) , (3, b, b + 2) ซึ่งมี 3 รูป

⋮

(b – 1, b, b) , (b – 1, b, b + 1), ... , (b – 1, b, 2b – 2) ซึ่งมี b – 1 รูป

(b, b, b) , (b, b, b + 1) , ... , (b, b, 2b – 1) ซึ่งมี b รูป

ดังนั้น จำนวนรูปสามเหลี่ยมทั้งหมดที่มีด้านที่ยาวปานกลางเท่ากับ b คือ 1 + 2 + 3 + ... + b = $\frac{b(b+1)}{2}$ รูป

นั่นคือ $N(x,b,x)=\frac{b(b+1)}{2}$

**ทฤษฎีบท 4** ให้ $b\in\mathbb{N}$ และ $\sum_{i=1}^{b} N(x,i,x)$ แทน จำนวนชุดของรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่ยาวปานกลางไม่เกิน b แล้ว $\sum_{i=1}^{b} N(x,i,x)=\frac{b(b+1)(b+2)}{6}$

**บทพิสูจน์** จำนวนรูปสามเหลี่ยมทั้งหมดที่มีด้านที่ยาวปานกลางเท่ากับ 1 คือ $\frac{1(1+1)}{2}=1$ รูป

จำนวนรูปสามเหลี่ยมทั้งหมดที่มีด้านที่ยาวปานกลางเท่ากับ 2 คือ $\frac{2(2+1)}{2}=3$ รูป

จำนวนรูปสามเหลี่ยมทั้งหมดที่มีด้านที่ยาวปานกลางเท่ากับ 3 คือ $\frac{3(3+1)}{2}=6$ รูป

⋮

จำนวนรูปสามเหลี่ยมทั้งหมดที่มีด้านที่ยาวปานกลางเท่ากับ b คือ $\frac{b(b+1)}{2}$ รูป

ดังนั้น จำนวนรูปสามเหลี่ยมทั้งหมดที่มีด้านที่ยาวปานกลางไม่เกิน b คือ

$$1+3+6+\ldots+\frac{b(b+1)}{2}=\frac{1(2)}{2}+\frac{2(3)}{2}+\frac{3(4)}{2}+\ldots+\frac{b(b+1)}{2}$$

เนื่องจาก $(1)(2)+(2)(3)+\ldots+(n)(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

ดังนั้น $1+3+6+\ldots+\frac{b(b+1)}{2}=\frac{b(b+1)(b+2)}{6}$

นั่นคือ $\sum_{i=1}^{b} N(x,i,x)=\frac{b(b+1)(b+2)}{6}$

**ทฤษฎีบท 5** ให้ $a\in\mathbb{N}$ และ $N(a,x,x)$ แทน จำนวนชุดของรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่สั้นที่สุดเท่ากับ a แล้ว $N(a,x,x)=\infty$

**บทพิสูจน์** ให้ a เป็นด้านที่สั้นที่สุด

ถ้า a = 1 จะได้รูปแบบของสามเหลี่ยม คือ (1, 1, 1), (1, 2, 2), (1, 3, 3), ...

ซึ่งมีจำนวนรูปสามเหลี่ยมเป็นอนันต์

ถ้า a = 2 จะได้รูปแบบของสามเหลี่ยม คือ (2, 2, 2), (2, 2, 3), (2, 3, 3), ...

ซึ่งมีจำนวนรูปสามเหลี่ยมเป็นอนันต์

⋮

ดังนั้น จำนวนรูปสามเหลี่ยมทั้งหมดที่มีด้านที่สั้นที่สุดเท่ากับ a มีจำนวนอนันต์รูป

นั่นคือ $N(a,x,x)=\infty$

**ทฤษฎีบท 6** ให้ $a,b\in\mathbb{N}$ โดยที่ $a\le b$ และ $N(a,b,x)$ แทน จำนวนชุดของรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่สั้นที่สุดเท่ากับ a และด้านที่ยาวปานกลางเท่ากับ b แล้ว $N(a,b,x)=a$

**บทพิสูจน์** ให้ a, b, c เป็นความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม โดยที่ $a\le b\le c$

จะเห็นว่า c = b, b + 1, b + 2, ... , a + b – 3, a + b – 2, a + b – 1

ดังนั้น จำนวนรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ (a + b – 1) – b + 1 = a รูป

นั่นคือ $N(a,b,x)=a$

**ทฤษฎีบท 7** ให้ $a,c\in\mathbb{N}$ โดยที่ $a\le c$ และ $N(a,x,c)$ แทน จำนวนชุดของรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่สั้นที่สุดเท่ากับ a และด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ c แล้ว $N(a,x,c)=\begin{cases} a & , a\le\frac{c}{2} \\ c-a+1 & , a>\frac{c}{2}\end{cases}$

**บทพิสูจน์** ให้ a, b, c เป็นความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม โดยที่ $a\le b\le c$

**กรณีที่ 1** $a\le\frac{c}{2}$

จะเห็นว่า b = c – (a – 1), c – (a – 2), c – (a – 3), ... , c – 2, c – 1, c

ดังนั้น จำนวนรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ c – (c – (a – 1)) + 1 = a รูป

**กรณีที่ 2** $a>\frac{c}{2}$

จะเห็นว่า b = a, a + 1, a + 2, ... , c – 2, c – 1, c

ดังนั้น จำนวนรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ c – a + 1 รูป

นั่นคือ $$N(a,x,c)=\begin{cases} a & , a\le \frac{c}{2} \\ c-a+1 & , a>\frac{c}{2} \end{cases}$$

**บทแทรก 8** ให้ $n\in\mathbb{N}$ และ N(n) แทน จำนวนชุดของรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ n เมื่อเรียงลำดับตามชุดที่มีด้านที่สั้นที่สุดเป็น 1, 2, 3, ..., n

แล้ว $$N(n)=\begin{cases} 1\quad 2\quad 3\quad \frac{n+1}{2}-1\quad \frac{n+1}{2}\quad \frac{n+1}{2}-1\quad 3\quad 2\quad 1 & , n\in O \\ 1\quad 2\quad 3\quad \frac{n}{2}-1\quad \frac{n}{2}\quad \frac{n}{2}\quad \frac{n}{2}-1\quad 3\quad 2\quad 1 & , n\in E \end{cases}$$

**บทพิสูจน์** ตามทฤษฎีบท 7 โดยกำหนดให้ด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ n และด้านที่สั้นที่สุดเท่ากับ 1, 2, 3, ..., n ตามลำดับ

**ทฤษฎีบท 9** ให้ $b,c\in\mathbb{N}$ โดยที่ $b\le c$ และ $N(x,b,c)$ แทน จำนวนชุดของรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านที่ยาวปานกลางเท่ากับ b และด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ c แล้ว $$N(x,b,c)=\begin{cases} 0 & , b\le \frac{c}{2} \\ 2b-c & , b>\frac{c}{2} \end{cases}$$

**บทพิสูจน์** ให้ a, b, c เป็นความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม โดยที่ $a\le b\le c$

**กรณีที่ 1** $b\le \frac{c}{2}$

จะเห็นว่าไม่มี a ที่ทำให้เกิดรูปสามเหลี่ยมได้

นั่นคือ ไม่มีรูปสามเหลี่ยมในกรณีนี้

**กรณีที่ 2** $b>\frac{c}{2}$

จะเห็นว่า a = c – b + 1, c – b + 2, c – b + 3, ... , b – 2, b – 1, b

ดังนั้น จำนวนรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ b – (c – b + 1) + 1 = 2b – c รูป

นั่นคือ $$N(x,b,c)=\begin{cases} 0 & , b\le \frac{c}{2} \\ 2b-c & , b>\frac{c}{2} \end{cases}$$

**ทฤษฎีบท 10** ให้ $m,n\in\mathbb{N}$ โดยที่ $m\le n$ และ $N(m,n)$ แทน จำนวนชุดของรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านประกอบสองด้านเท่ากับ m และ n แล้ว $N(m,n)=2m-1$

**บทพิสูจน์** ให้ $m\le n$ เป็นความยาวของสองด้านใดๆ ของรูปสามเหลี่ยม

**กรณีที่ 1** $m\le \frac{n}{2}$

โดยทฤษฎีบท 6 เมื่อ m คือ ด้านที่สั้นที่สุด และ n คือ ด้านที่ยาวปานกลาง
จะได้ว่าจำนวนชุดของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ m
โดยทฤษฎีบท 7 เมื่อ m คือ ด้านที่สั้นที่สุด และ n คือ ด้านที่ยาวที่สุด
จะได้ว่าจำนวนชุดของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ m
โดยทฤษฎีบท 9 เมื่อ m คือ ด้านที่ยาวปานกลาง และ n คือ ด้านที่ยาวที่สุด
จะได้ว่าจำนวนชุดของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ 0
แต่จากทฤษฎีบท 6 และ 7 จะมีรูปแบบที่ซ้ำกัน 1 รูป คือ (m, n, n)
ดังนั้นจำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านเป็นจำนวนเต็มและมีด้านประกอบสองด้านเท่ากับ m และ n
คือ m + m + 0 – 1 = 2m – 1

**กรณีที่ 2** $m > \frac{n}{2}$
โดยทฤษฎีบท 6 เมื่อ m คือ ด้านที่สั้นที่สุด และ n คือ ด้านที่ยาวปานกลาง
จะได้ว่าจำนวนชุดของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ m
โดยทฤษฎีบท 7 เมื่อ m คือ ด้านที่สั้นที่สุด และ n คือ ด้านที่ยาวที่สุด
จะได้ว่าจำนวนชุดของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ n – m + 1
โดยทฤษฎีบท 9 เมื่อ m คือ ด้านที่ยาวปานกลาง และ n คือ ด้านที่ยาวที่สุด
จะได้ว่าจำนวนชุดของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ 2m – n
แต่จากทฤษฎีบท 6 และ 7 จะมีรูปแบบที่ซ้ำกัน 1 รูป คือ (m, n, n)
จากทฤษฎีบท 7 และ 9 จะมีรูปแบบที่ซ้ำกัน 1 รูป คือ (m, m, n)
ดังนั้นจำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านเป็นจำนวนเต็มและมีด้านประกอบสองด้านเท่ากับ m และ n
คือ m + n – m + 1 + 2m – n – 2 = 2m – 1
นั่นคือ $N(m,n) = 2m - 1$

## สรุปผลการวิจัย

ผลการศึกษาพบว่า 1) จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านเป็นจำนวนเต็มและมีด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ c คือ $\frac{c^2+2c+1}{4}$ และ $\frac{c^2+2c}{4}$ เมื่อ c เป็นจำนวนคี่และคู่ ตามลำดับ 2) จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านเป็นจำนวนเต็มและมีด้านที่ยาวที่สุดไม่เกิน c คือ $\frac{2c^3+9c^2+10c+3}{24}$ และ $\frac{2c^3+9c^2+10c}{24}$ เมื่อ c เป็นจำนวนคี่และคู่ ตามลำดับ 3) จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านเป็นจำนวนเต็มและมีด้านที่ยาวปานกลางเท่ากับ b คือ $\frac{b(b+1)}{2}$ 4) จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านเป็นจำนวนเต็มและมีด้านที่ยาวปานกลางไม่เกิน b คือ $\frac{b(b+1)(b+2)}{6}$ 5) จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านเป็นจำนวนเต็มและมีด้านที่สั้นที่สุดเท่ากับ a มีจำนวนอนันต์ 6) จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านเป็นจำนวนเต็มและมีด้านที่สั้นที่สุดเท่ากับ a ด้านที่ยาวปานกลางเท่ากับ b คือ a 7) จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านเป็นจำนวนเต็มและมีด้านที่สั้นที่สุดเท่ากับ a ด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ c คือ a เมื่อ $a \le \frac{c}{2}$ และ c – a + 1 เมื่อ $a > \frac{c}{2}$

8) จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านเป็นจำนวนเต็มและมีด้านที่ยาวปานกลางเท่ากับ b ด้านที่ยาวที่สุดเท่ากับ c คือ 0 เมื่อ $b \le \frac{c}{2}$ และ $2b - c$ เมื่อ $b > \frac{c}{2}$ 9) จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านเป็นจำนวนเต็มและมีด้านประกอบสองด้านเท่ากับ m และ n คือ $2m - 1$ เมื่อ $m \le n$

## เอกสารอ้างอิง

East, J. and Niles, R. (2019). Integer triangles of given perimeter : a new approach via group theory. American Mathematical Monthly 126(8): 735–739.

Fitzpatrick, R. (2005). Euclid's Elements in Greek : Vol. I : Books 1–4. North Carolina: Lulu Press. pp. 49.

Hirschhorn, M.D. (2000). Triangles with integer sides, revisited. Mathematics Magazine 73(1): 53–56.

Meekoed, N. (2011). The Number of General Triangle with Longest Side Less Than or Equal to n. KKU Science Journal 39(4): 696–700.

Nicholas, K. and Bennet, M. (1998). Counting integer triangles. Mathematics Magazine 71(4): 291–295.

❑❑❑❑❑